UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Efeitos da Compactação de Dimensões Extras Violando a Invariância de Lorentz na Teoria de Campos

JOÃO PAULO LOPES GOIS

Campina Grande, PB

2 de outubro de 2018

Efeitos da Compactação de Dimensões Extras Violando a Invariância de Lorentz na Teoria de Campos

JOÃO PAULO LOPES GOIS

Trabalho de Conclusão do Curso Mestrado em Física pela Universidade Federal de Campina Grande. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS

Campina Grande, PB

2 de outubro de 2018

JOÃO PAULO LOPES GOIS

Efeitos da Compactação de Dimensões Extras Violando a Invariância de Lorentz na Teoria de Campos

Trabalho de Conclusão do Curso Mestrado em Física pela Universidade Federal de Campina Grande. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Eduardo Passos
Unidade Acadêmica de Física - UAF/UFCG
Orientador

Unidade Acadêmica de Física - UAF/UFCG
Examinador interno

Departamento de Física - DF/UEPB
Examinador Externo

Campina Grande, 2 de outubro de 2018

Dedico este trabalho ao meu
grande amigo João Paulo S. Castro (in memorian),
por sua amizade e apoio, pelo exemplo de humanidade que foi,
e por sua dedicação à Física.

Agradecimentos

De início gostaria de agradecer a minha família que sempre foi a base de todos meus passos, a minha mãe por me ensinar o valor da humildade, ao meu pai por me ensinar o valor do trabalho e a minha irmã por me dar foco e motivação.

Agradeço também ao professor D.r Eduardo Passos por me aceitar como seu orientando, pelo seu trabalho e esforço em me conduzir durante o curso e pela sua enorme paciência, aos demais professores que me ajudaram durante a formação, tais eles como os D.rs João Rafael, Anacleto e Francisco Brito, e a toda coordenação de Pós-graduação do departamento de Física da Universidade federal de Campina Grande e a Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro dado.

Aos amigos que me apoiaram durante todo o processo, dos quais posso citar alguns como Marcus Douglas, Tayane Silveira, Damião Renato ao qual tive o prazer de dividir apartamento e conviver no dia a dia. Felipe Leite e Samyla de Sousa, esses dois por ter construído uma amizade sólida e familiar, aos amigos Osimar Moura, Renata Vilela, Kairo Filipe, Gabriel Cavalcante, Elaine Costa, Alan Amorim, Michel Medeiros, Tayná vieira, Yago Lima e Wesley Lopes, a todos sou grato por terem me abraçado e acolhido como amigo.

Aos amigos em que o departamento deu a mim a oportunidade de conhecer, entre eles alguns como Andreia Freire, Guacira Melo, Leandro Diniz, Anderson Thiago, Herbert Leandro.

Em especial aos amigos que contribuíram com esse trabalho de forma direta, Rafael de Jesus com toda sua disposição em ajudar e contribuir, ao Klecio Lima, a ele não só pela grande ajuda, mas também por sua amizade e preocupação, estando sempre próximo incentivando, a estes dois, juntamente com Eduardo, sou muito grato.

E pôr fim aos amigos que carrego desde sempre e que sempre estiveram próximos, Gilvan Bonfim, Ozorio Neto e João Paulo S. Castro (In Memorian).

Resumo

Neste trabalho, consideramos a proposta de que a violação da invariância de Lorentz espontânea (sLIV) está relacionada à compactação de dimensões extras descrita por um campo "éter", onde tal compactação é feita sem envolver branas. Em tal pano de fundo, as interações de outros campos com o éter modificam as relações de dispersão aumentando a massa das excitações Kaluza-Klein. A escala de massa caracterizando cada torre de Kaluza-Klein pode ser escolhida independentemente de cada espécie de escalar, férmion e bóson de calibre. Tanto no setor escalar quanto no setor campo de calibre as separações de massa são similares, porém no caso de férmions há uma maior valorização. No setor de campo de calibre estudamos a consistência desta teoria, onde percebemos que a relação de dispersão foi modificada, caracterizando um meio a partir da interação com éter. O propagador associado, modificado devido a interação com o éter, preserva a propriedade de unitariedade e o tensor energia-momento se apresenta antissimétrico, ressaltando a ausência da invariância de Lorentz. A densidade de energia que é invariante de calibre é fortalecida pela contribuição da dimensão extra e pelo campo éter.

Palavras-chave: Eletrodinâmica modificada, Violação da Invariância de Lorentz, Teoria da compactação do éter.

Abstract

In this work, we considered the proposition that the spontaneous Lorentz invariance violation (sLIV) is related to extra dimensions compactification, described by a vector "aether" field, where such compactification is done without invoking branes. In such a background, interactions of other fields with the aether can lead to modified dispersion relations, increasing the mass of the Kaluza-Klein excitations. The mass scale characterizing each Kaluza-Klein tower can be chosen independently for each species of scalar, fermion, and gauge boson. Both in the scalar sector and in the gauge field sector the mass separations are similar, however in the case of fermions there is a greater valorization. In the gauge field we study the consistency of this theory, where we perceive that the dispersion relation was modified, characterizing a medium from the interaction with ether. The associated propagator, modified due to interaction with the aether, preserves the property of unitarity and the energy-momentum tensor is antisymmetric, emphasizing the absence of the Lorentz invariance. The energy density that is gauge invariant is strengthened by the contribution of the extra dimension and the ether field.

Keywords: Aether compactification theory, Lorentz invariance violation, Modified electrodynamics.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A invarâcia de Lorentz no espaço-tempo quadri-dimensional é um ingrediente básico no Modelo Padrão da física das partículas elementares (teoria quântica de campos relativística) a qual tem sido verificada por inúmeros testes experimentais [1]. Contudo, existem motivações para um estudo profundo na possível violação da invariância de Lorentz. Uma das razões é contexto quantitativo estabelecendo que o grau pelo qual a natureza preserva a invariância de Lorentz seja expressa dentro de um regime de energia que se permite violações tais como o regime de energia que rege os efeitos da gravidade quântica (regime de energia próximo a escala de Planck, $M_{\rm Pl} \sim 10^{19}{\rm GeV}$ na qual a natureza do espaço-tempo seja supostamente discreta) [2, 3]. A sensibilidade dos testes experimentais atuais indica que os efeitos da violação da invariância de Lorentz, sejam suprimidos fortemente num regime de energia muito além ao regime de energia que rege a física do modelo padrão.

Foi demonstrado que a quebra espontânea da invariância de Lorentz deva ocorrer no contexto de algumas teorias de cordas [4]. No modelo padrão, a quebra espontânea da simetria ocorre quando as simetrias da Lagrangiana não são obedecidas pelo estado fundamental associado a teoria. Isso ocorre quando o vácuo perturbativo seja instável. As mesmas ideias aplicam-se à teoria de cordas co-variantes que, diferentemente do modelo padrão, envolvem tipicamente interações que poderiam desestabilizar o vácuo e gerar valores esperados do vácuo não-nulos para as estruturas tensoriais de Lorentz (incluindo vetores) [5]. Um mecanismo simples para implementar a violação da invariância de Lorentz local é o de postular a existência de um campo tensorial com valor esperado do vácuo diferente de zero, que se acople com os campos de modelo padrão. O procedimento mais elementar para isto, é de considerar um único campo vetorial tipo-espaço com uma norma constante. Este campo deve selecionar direções preferenciais em cada ponto no espaço-tempo e quaisquer campos que se juntem a ele sofrerão uma violação local da invariância de Lorentz (proposta de extensão do modelo padrão de D. Colladay e A. Kostelecky [5]).

Depois disto, surgiram outros estudos alternativos para estudar os efeitos da violação da invariância de Lorentz, tais como a proposta de Myers e M. Pospelov (operadores de altas ordens derivativas acoplados com campos do modelo padrão e regidos por quadri-vetores constantes que determinam direções preferenciais [6]) e a proposta de Hořava-Lifshitz (implementando uma assimetria entre espaço e tempo [7]).

Recentemente, H. Tam e S. Carroll propuseram uma nova abordagem para se investigar a ocorrência dos efeitos da violação da invariância de Lorentz pela ideia de dimensões extras escondidas [8]. Conhecido na literatura como a compactação do Éther (Aether Compactification em inglês), este estudo tem como novidade a demonstração de que seja possível aparecer diferentes espaçamentos na torre de Kalusa Klein (algo como assimetria entre dimensões espaciais). O modelo funciona num espaço-tempo plano de cinco dimensões no qual a violação da invariância de Lorentz é controlada por penta-vetores constantes tipo-espaço: $u^a = (0, 0, 0, 0, v)$ que mantém a a invariância de Lorentz preservadas em quatro dimensões[9]. E a quinta dimensão sendo compactada. O objetivo geral desta dissertação é o de estudar aspectos da violação da invariância de Lorentz pela compactação do Éter, principalmente, por se tratar de uma abordagem que abrange vários ramos da física contemporânea: quebra de simetrias, dimensões extras e teoria de campos, fornecendo assim, um leque de técnicas para serem assimiladas ao longo do trabalho.

É importante mencionar que teorias da gravidade mediadas por estruturas tensoriais-vetoriais são importante para física contemporânea, pois tais teorias podem lançar algum entendimento sobre o funcionamento da natureza quântica da gravidade. Uma dessas teorias, é a de Einstein-Éter [10, 11] na qual o campo vetorial de Éter é assumido a ser tipo-tempo e portanto quebrando a invariância por translação (boosts) da invariância de Lorentz. Esta abordagem tem sido investigada ao longo dos anos em vários aspectos (ver as Refs.[12, 13, 14, 15, 16]). Segue também alguns trabalhos relacionados que discutem a possibilidade do campo de Éter quebrar a invariância por rotações (gerando anisotropia no espaço) [17, 18, 19, 20]. A estrutura interna e a dinâmica de tais teorias ainda estão sendo examinadas, por exemplo, o estudo estabilidade do campo de Éter foi considerado em [21, 22], e implicações na lei de Stefan-Boltzmanne e o efeito Casimir na temperatura finita [23]. Naturalmente, para se obter uma melhor compreensão sobre este aspecto, é necessário examinar outras características da teoria, como o seu conteúdo de energia, unitariedade do propagador de Feynman, etc. Depois de uma breve revisão sobre a compactação do campo de Éter na teoria de campos (tomando como base a Ref.[8]), temos como objetivo específico, o de examinar a consistência teórica do modelo Maxwell-Éter (setor do campo de calibre), com a intenção de desenvolver novos resultados para linha de pesquisa.

A estrutura desta dissertação é dada como segue: no Cap. II, faremos uma revisão sobre os impactos do compactação do campo de Éter sobre setores da Lagrangiana da teoria de campos usual. Tratando de início um pouco da dinâmica do campo de éter na teoria de campos com dimensão extra do espaço-tempo, em seguida consideramos extensões para o setor do campo escalar (modelo de klein-Gordon-Éter), campo de calibre (modelo de Maxwell-Éter) e campo fermiônico (modelo de Dirac-Éter). No Cap.III, consideramos apenas a extensão do setor do campo de calibre e examinamos a sua consistência através da obtenção do tensor energia-momento (a análise da positividade da energia) e da obtenção do propagador de Feynman (condições do modelo ser unitário). No Cap. IV, apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

Ao longo de todo o trabalho, consideramos um espaço-tempo plano penta-dimensional com coordenadas, $x^a = \{x^\mu, x^5\}$ e a assinatura da métrica: $(+ - - - -)$. Também devemos adotar o sistema natural de unidades: $c = \hbar = 1$.

Capítulo 2

Abordagem do Éter na Teoria de Campos

Neste capítulo abordamos a possibilidade da quebra da invariância de Lorentz através da ideia do Éter como compactação de uma dimensão extra em modelos da teoria de campos em cinco-dimensões [Carroll]. Nesta abordagem, a quinta dimensão é compactada numa circunferência de raio R. O Éter corresponde a um penta-vetor tipo-espaço, definido como

$$u^a = (0, 0, 0, 0, v) \tag{2.1}$$

que controla os efeitos da violação da invariância de Lorentz, exclusivamente na direção da dimensão extra. Portanto, este mecanismo será usado para construir extensões de Lagrageanas da teoria de campos usual, tais como os setores dos campos: escalar, de calibre e fermiônico, respectivamente, contudo traremos antes de cada abordagem citada um pouco sobre a dinâmica do campo do éter na teoria de campos. Para construir as possíveis extensões devemos nos manter no espaço-tempo plano ($g_{ab} = \eta_{ab}$) e ao mesmo tempo impor uma existência de uma simetria Z_2, tal que $u^a \to -u^a$. Além disso, devemos seguir os seguintes critérios: i) ordem das derivadas igual ao dois (número padrão dos modelos de teoria de campos); ii) ser invariante de calibre; iii) não ser um termo de superfície.

2.1 A Dinâmica do Campo do Éter

Nesta seção, mostramos um pouco sobre a dinâmica do campo do éter na teoria de campos com dimensão extra do espaço-tempo.

Neste cenário, a LIV é inserida em termos de campo dinâmico, u^a, denominado de campo do éter. Esta quantidade representa um campo penta-vetorial com seu valor esperado no vácuo diferente de zero. Considera-se um espaço-tempo plano em cinco dimensões com coordenadas: $x^a = (x^\mu, y)$ com $\mu = 0, 1, 2, 3$. A quinta dimensão é compactada sobre um círculo. Define-se um tensor anti-simétrico, B_{ab}, em termos de u^a,

$$B_{ab} = \nabla_a u_b - \nabla_b u_a. \tag{2.2}$$

onde ∇_a corresponde a derivada covariante usual no espaço curvo. A ação clásica associada é dada por

$$S = M_* \int d^5x \sqrt{g} \Big[-\frac{1}{4} B_{ab} B^{ab} - \lambda \big(u_a u^a - v^2 \big) + \sum_i \mathcal{L}_i \Big], \tag{2.3}$$

onde g é o determinante da métrica e M_* é um parâmetro de escalonamento de massa. Aqui, L_i representa vários termos de interações acoplados com o campo do éter e com os campos de matéria. O multiplicador de Lagrange, λ, determina o vículo:

$$u^a u_a = v^2. \tag{2.4}$$

Neste caso, u_a tem dimensão de massa. Para $\mathcal{L}_i = 0$, a equação de campo a princípio seria dada na forma

$$\nabla_a B^{ab} + 2\lambda u^b = 0. \tag{2.5}$$

Considerando que o multiplicador de Lagrange seja dado como

$$\lambda = \frac{1}{2v^2} u_c \nabla_d B^{cd}. \tag{2.6}$$

Isto deve implicar em

$$\nabla_a B^{ab} + v^{-2} u^b u_c \nabla_d B^{cd} = 0. \tag{2.7}$$

Para $B_{ab} = 0$ temos uma solução trivial para a equação acima. Uma outra possibilidade de solução da Eq.(2.7) é

$$u^a = (0, 0, 0, 0, v), \tag{2.8}$$

onde o éter é um campo vetorial tipo espaço que possui um componente diferente de zero ao longo da dimensão extra. Esta escolha é importante, pois preserva invariância de Lorentz no espaço quadri-dimensional. Além disso, o tensor energia-momento associado ao campo do éter, deverá ter a forma

$$T^{ab} = B^{ac} B^b_c - \frac{1}{4} g^{ab} B_{cd} B^{cd} + v^{-2} u^a u^b u_c \nabla_d B^{cd}, \tag{2.9}$$

o qual desaparece na condição $B^{ab} = 0$.

2.2 Setor do Campo Escalar

A densidade Lagrangeana envolvendo um campo escalar real ϕ, para acoplamento de baixas ordens derivativas é dada na forma,

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2\mu_\phi^2}u^a u^b \partial_a\phi\partial_b\phi. \tag{2.10}$$

Tendo em vista encontrar a equação de movimento relacionada a Eq (2.10),temos que submete-la a equação de Eoler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_a\phi)} = 0. \tag{2.11}$$

Tal que devemos obter a seguinte equação de movimento:

$$-\partial_a\partial^a\phi - m^2\phi = -\mu_\phi^{-2}\partial_a(u^a u^b\partial_b\phi). \tag{2.12}$$

Expandido o campo escalar em modos de Fourier (ondas planas)

$$\phi \sim e^{ik_a x^a}, \tag{2.13}$$

e, inserindo na Eq.(2.13), temos a seguinte relação de dispersão covariante:

$$k_a k^a - m^2 - \mu_\phi^{-2}(u_a k^a)^2 = 0 \tag{2.14}$$

Isto nos conduz a expressão modificada:

$$k_\mu k^\mu = m^2 + \left(1+\alpha_\phi^2\right)k_5^2 \tag{2.15}$$

onde

$$\alpha_\phi = v/\mu_\phi. \tag{2.16}$$

Note que com a nossa métrica adotada, temos $k_\mu k^\mu = \omega^2 - \vec{k}^2$ (sendo ω a frequência angular e $\vec{k}$ o vetor de onda).

Note que este simples cálculo realizado acima, mostra o efeito do acoplamento do campo vetorial, u^a, tipo-espaço. Compactando agora a quinta dimensão numa circunferência de raio R, isto quantiza o momento na direção, $k_5 = n/R$ (com n, representando o número de cada estados quantizados). Na teoria padrão de Kaluza-Klein (KK), isto conduz ao aparecimento de uma torre de estados massivos: $m_{KK}^2 = m^2 + (n/R)^2$. Com a adição do campo de Éter, os espaçamentos massivos entre os diferentes estados na torre KK são reforçados como,

$$m_{AC}^2 = m^2 + \left(1+\alpha_\phi^2\right)\left(\frac{n}{R}\right)^2. \tag{2.17}$$

Neste caso, o parâmetro α_ϕ pode ser interpretado como a razão do valor esperado do vácuo diferente de zero do Éter (vev) e a escala de massa μ_ϕ que caracteriza o acoplamento, podendo ser maior do que a unidade, dependendo da intensidade do efeito. Se o vev é da ordem de $v \sim M_{\mathrm{P}}$, e o parâmetro de acoplamento seja $\mu_\phi \sim \mathrm{TeV}$ a massa dos estados excitados é fortalecida por um fator de 10^{15}. A dimensão extra compactada poderá ser maior do que $R \sim 1\,\mathrm{mm}$ e o estado $n = 1$, poderá ter uma massa da ordem de TeV, compatível com as energias dos atuais aceleradores de partículas.

2.3 Setor do Campo de Calibre

Considere um campo de Calibre Ambeliano A_a, com o tensor intensidade de campo eletromagnético: $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$. A Lagrangeana com acoplamento de baixa ordem no campo externo u^a, é dada como,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} + \frac{1}{2\mu_A^2}u^a u^b \eta^{cd} F_{ac}F_{bd}. \tag{2.18}$$

Com intuito de obter as equações de movimento relacionadas a equação a cima, devemos seguir o caminho similar ao caso do campo escalar e, submeter a Lagrageana, Eq.(2.18) as equações de Eoler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_f} - \partial_g \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_g A_f)} = 0. \tag{2.19}$$

Com o socorro dos potenciais $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_5)$, primeiro podemos construir o tensor intensidade de campo eletromagnético como [24],

$$F_{ab} = \frac{\partial A_a}{\partial x_b} - \frac{\partial A_b}{\partial x_a}; \quad a, b = 0, 1, 2, 3, 5. \tag{2.20}$$

$$F_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 & Q \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 & G_1 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 & G_2 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 & G_3 \\ -Q & -G_1 & -G_2 & -G_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso, devemos considerar: $\partial_a = (\partial_0, \partial_{\hat{i}}, \partial_5) = (\partial_t, \vec{\nabla}, \partial_5)$, tal que

$$F_{i0} = \partial_{\hat{i}} A_0 - \partial_0 A_{\hat{i}} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial A_{\hat{i}}}{\partial t} = E_i; \tag{2.21}$$

$$F_{\hat{i}\hat{j}} = \partial_{\hat{i}} A_{\hat{i}} - \partial_{\hat{j}} A_{\hat{i}} = \varepsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} B^{\hat{k}}; \tag{2.22}$$

$$F_{50} = \partial_5 A_0 - \partial_0 A_5 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^5} - \frac{\partial A_5}{\partial t} = Q; \tag{2.23}$$

$$F_{5\hat{i}} = \partial_5 A_{\hat{i}} - \partial_{\hat{i}} A_5 = \frac{\partial A_{\hat{i}}}{\partial x^5} - \vec{\nabla} A_5 = G_{\hat{i}}, \tag{2.24}$$

onde $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k} = 1, 2, 3$. Antes de tudo, reescrevemos o primeiro termo da Lagrangeana acima, na forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M &= -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \\
&= -\frac{1}{2} \left[\eta^{au} \eta^{bv} - \eta^{bu} \eta^{av} \right] \left[(\partial_a A_b)(\partial_u A_v) \right]. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

De forma que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_g A_f)} &= -\frac{1}{2} \left[\eta^{au} \eta^{bv} - \eta^{bv} \eta^{au} \right] \left[\frac{\partial(\partial_a A_b)}{\partial(\partial_g A_f)} (\partial_u A_v) + (\partial_a A_b) \frac{\partial(\partial_u A_v)}{\partial(\partial_g A_f)} \right], \\
&= -\frac{1}{2} \left[\eta^{au} \eta^{bv} - \eta^{bu} \eta^{av} \right] \left[\delta_{ag} \delta_{bf} (\partial_u A_v) + (\partial_a A_b) \delta_{ug} \delta_{vf} \right], \\
&= -\frac{1}{2} \left[\delta_{ag} \delta_{bf} F^{ab} + \delta_{ug} \delta_{vf} F^{uv} \right], \\
&= -F^{gf}. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Substituindo a Eq(2.26) na Eq (2.19), temos enfim:

$$\partial_g F^{gf} = 0. \qquad (2.27)$$

Assumindo que os índices "g e f"que aparecem na equação (2.27) são índices somados, o que nos permite substitui-los por qualquer outros índices de mesma representação dimensional sem que percam suas propriedades, temos $(g \to a)$ e $(f \to b)$, tal que devemos encontrar

$$\partial_a F^{ab} = 0. \qquad (2.28)$$

Rescrevendo agora a segunda parte da equação (2.18), temos

$$\mathcal{L}_{CE} = \frac{1}{2\mu_A^2} u^a u^b \eta^{cd} (\partial_a A_c - \partial_c A_a)(\partial_b A_d - \partial_d A_b). \qquad (2.29)$$

Submetendo a Eq.(2.29) à equação de Euler-Lagrange, Eq.(2.19), temos

$$\begin{aligned}
-\partial_g \frac{\partial \mathcal{L}_{CA}}{\partial(\partial_g A_f)} &= \frac{1}{2\mu_A^2} u^a u^b \eta^{cd} (-\partial_g) \left[\frac{(\partial_a A_c - \partial_c A_a)}{(\partial(\partial_g A_f))} F_{bd} + F_{ac} \frac{(\partial_b A_d - \partial_d A_b)}{(\partial(\partial_g A_f))} \right], \\
&= \frac{1}{2\mu_A^2} u^a u^b \eta^{cd} (-\partial_g) \left[(\delta_{ag} \delta_{cf} - \delta_{cg} \delta_{af}) F_{bd} + F_{ac} (\delta_{bg} \delta_{df} - \delta_{dg} \delta_{bf}) \right], \\
&= \frac{1}{2\mu_A^2} u^a u^b \eta^{cd} \left[(\partial_c \delta_{af} F_{bd} - \partial_a \delta_{cf} F_{bd}) + (\partial_d \delta_{bf} F_{ac} - \partial_b \delta_{df} F_{ac}) \right], \\
&= \frac{1}{2\mu_A^2} u^a u^b \left[\partial^d \delta_{af} F_{bd} - \partial_a F_b^f + \partial^c \delta_{bf} F_{ac} - \partial_b F_a^f \right], \\
&= \mu_A^{-2} \left[u_c u^b \partial_a F^{ca} - u_c u^a \partial_a F^{cb} \right]. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\mu_A^{-2} \left[u_c u^b \partial_a F^{ca} - u_c u^a \partial_a F^{cb} \right] = 0. \qquad (2.31)$$

Através dos resultados, Eq.(2.28) e Eq.(2.31) concluímos que

$$\partial_a F^{ab} = -\mu_A^{-2}\left[u_c u^b \partial_a F^{ca} - u_c u^a \partial_a F^{cb}\right]. \tag{2.32}$$

E, pela decomposição das componentes do espaço-tempo como $b = 5$ e $b = \nu$, temos

$$\partial_\mu F^{\mu 5} = 0; \tag{2.33a}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -(1+\alpha_A^2)\partial_5 F^{5\nu} \tag{2.33b}$$

onde,

$$\alpha_A = \frac{v}{\mu_A}. \tag{2.34}$$

Quanto a transformação de calibre associada a teoria, podemos de imediato recorrer a transformações de calibre usual: $A_a \to A_a + \partial_a\lambda$ e impor que $A_5 = 0$. Contudo, isto deve nos conduzir a algum tipo liberdade de calibre residual. Então podemos manter a transformação: $A_a \to A_a + \partial_a\tilde{\lambda}$, enquanto que $\partial_5\tilde{\lambda} = 0$.

Neste ponto, vamos verificar os modos de propagação dos fótons através de sua relação de dispersão. A equação de movimento, Eq.(2.32) pode ser reescrita na seguinte forma (no calibre de Lorentz $\partial_a A^a = 0$):

$$\left[(\partial_a\partial^a + \mu_A^{-2}u_c u^a \partial_a \partial^c)\eta^{bd} - \mu_A^{-2}(u_c u^b \partial_a \partial^a - u_c u^a \partial_a \partial^b)\eta^{cd}\right] A_d = 0. \tag{2.35}$$

Aplicando o calibre Axial, em que $u_c A^c = 0$, a Eq.(2.35), se reduz a

$$\left(\partial_a\partial^a - \mu_A^{-2}u_c u^a \partial_a\partial^c\right)A^b = 0. \tag{2.36}$$

Escolhendo agora o calibre $A_5 = 0$, e usando a seguinte transformada de Fourrier: $A^d \to A^\nu \sim \epsilon^\nu(k)e^{ik_a x^a} \sim \epsilon^\nu(k)e^{ik_\mu x^\mu + ik_5 x^5}$, com $\epsilon^\nu(k)$ sendo o vetor de polarização, a Eq.(2.36) implica em

$$(-k_a k^a + \mu_A^{-2}u_c u^a k^c k_a)\epsilon^\nu(k) = 0. \tag{2.37}$$

Como $\epsilon^\nu(k) \neq 0$, escrevemos a seguir a relação de dispersão para a propagação dos fótons na sua versão modificada:

$$k_a k^a - \mu_A^{-2}(u_a k^a)^2 = 0, \tag{2.38}$$

de maneira que podemos reduzi-la como

$$k_\mu k^\mu = (1+\alpha_A^2)k_5^2. \tag{2.39}$$

Precisamente como no caso do campo escalar, os modos massivos de Kalusa-Klein são fortalecidos por um fator $(1+\alpha_A^2)$, embora não existir nenhuma necessidade de ter uma relação direta entre α_A e α_ϕ.

Uma vez que o meio externo devido a presença do campo de Éter funciona como gerador de modos massivos para os fótons, então seria interessante verificar a característica do meio reproduzido por este sistema. Neste sentido, devemos relacionar a velocidade de grupo e a velocidade de fase associadas. As soluções para as frequências para a Eq.(2.39) é escrita na forma

$$\omega = \pm\sqrt{|\vec{k}|^2 + (1+\alpha_A^2)k_5^2}. \tag{2.40}$$

A velocidade de grupo é definida camo $v_g = \partial\omega/\partial|\vec{k}|$, tal que

$$v_g = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(1+\alpha_A^2)\bar{k}^2}}. \tag{2.41}$$

onde $\bar{k} = k_5/|\vec{k}|$ que pode ser interpretado como o momento efetivo adquirido pelos fótons devido a influência da dimensão extra. Note que pela Eq.(2.41), mesmo na ausência dos efeitos da violação da invariância de Lorentz, $\alpha_A = 0$, o momento efetivo permanece. Por outro lado, a velocidade de fase, definida como $v_f = \omega/|\vec{k}|$ de reproduzir o seguinte resultado:

$$v_f = \pm\sqrt{1+(1+\alpha_A^2)\bar{k}^2}. \tag{2.42}$$

As velocidades de grupo e de fase estão relacionadas através da formula de Rayleigh's que é dada originalmente como,

$$\frac{v_f}{v_g} = 1 - \Big(\frac{\omega}{v_f}\Big)\Big(\frac{dv_f}{d|\vec{k}|}\Big). \tag{2.43}$$

Neste ponto, consideramos que $|\vec{k}| = k_5/\bar{k}$ de modo que devemos ter a seguinte relação: $d|\vec{k}| = k_5\bar{k}^{-2}d\bar{k}$. Isto gera um ajuste de mudança de variável para a Eq.(2.43):

$$\frac{v_f}{v_g} = 1 - \Big(\frac{\omega}{v_f}\Big)\Big(\frac{\bar{k}^2}{k_5}\frac{dv_f}{d\bar{k}}\Big). \tag{2.44}$$

Primeiro, pelas as Equações: (2.41), (2.42), obtemos

$$\frac{\omega}{v_f} = \frac{k_5}{\bar{k}}; \tag{2.45a}$$

$$\frac{dv_f}{d\bar{k}} = \frac{\lambda(1+\alpha_A^2)\bar{k}}{\sqrt{1+(1+\alpha_A^2)\bar{k}^2}}. \tag{2.45b}$$

Inserindo as Eqs.(2.45a)-(2.45a) na Eq.(2.44), obtemos finalmente

$$\frac{v_f}{v_g} = 1 - \frac{\lambda(1+\alpha_A^2)\bar{k}^2}{\sqrt{1+(1+\alpha_A^2)\bar{k}^2}}. \tag{2.46}$$

onde $\lambda \pm 1$. Considerando que $\bar{k}^2 << 1$, expandimos a Eq.(2.45b) na forma

$$\frac{v_f - v_g}{v_g} = -\lambda(1+\alpha_A^2)\bar{k}^2 + \mathcal{O}\big((1+\alpha_A^2)\big) \tag{2.47}$$

com $\mathcal{O}\big((1+\alpha_A^2)\big)$ sendo termos de ordens superiores em $(1+\alpha_A^2)$. Notando que para o caso $\lambda = -1$, temos $v_f > v_g$, isto caracteriza um meio normal. E, para o caso $+1$, temos $v_g > v_f$ que corresponde a um meio anômalo (indicação de efeitos de anisotropia). (Veja esta discursão para modelo de altas ordens derivativas [25])

2.4 Setor do Campo do Fermiônico

Por simplicidade, para o caso dos Fermions, nós nos mantemos no formalismo de Dirac (usando uma derivada). Dada a simetria $u^a \to -u^a$, poderíamos considerar de imediato um acoplamento da forma: $u^a u^b \bar{\psi}\gamma_a\gamma_b\psi$. Mas devido $u^a u^b$ ser uma quantidade simétrica nos seus dois índices, isto é equivalente a $u^a u^b \bar{\psi}\gamma_{(a}\gamma_{b)}\psi = u^a u^b \bar{\psi}\eta_{ab}\psi = v^2\overline{\psi}\psi$, de modo que essa interação não viola a invariância de Lorentz.

Então um exemplo de acoplamento não trivial e que envolva uma derivada é proposto como extensão da Lagrangeana de Dirac:

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi - m\bar{\psi}\psi + \frac{i}{\mu_\psi^2}u^a u^b\bar{\psi}\gamma_a\partial_b\psi, \tag{2.48}$$

onde γ^a, corresponde a uma matriz de Dirac (ou gamma). A Eq.(2.48), deve nos conduzir a seguinte equação de movimento,

$$i\gamma^a\partial_a\psi - m\psi + \frac{i}{\mu_\psi^2}u^a u^b\gamma_a\partial_b\psi = 0. \tag{2.49}$$

Neste ponto, vamos iniciar o processo de obtenção da relação de dispersão associas a Eq.(2.48). Neste sentido,

escrevemos o campo fermiônico como uma solução em termo da seguinte transformada de Fourier: $\psi(x) = u(k)e^{-ik_a x^a}$, tal que

$$\big(\not{k} - m + \frac{1}{\mu_\psi^2}u^a u^b\gamma_a k_b\big)u(k) = 0. \qquad (\not{k} \equiv k_a\gamma^a) \tag{2.50}$$

Multiplicando a Eq.(2.50) por $\big(\not{k} + m + \frac{1}{\mu_\psi^2}u^a u^b\gamma_a k_b\big)$ pelo seu lado da esquerdo, obtemos a seguinte relação de dispersão modificada para propagação de fermions massivos:

$$k_a k^a - \frac{2}{\mu_\psi^2}(u_a k^a)^2 - \frac{1}{\mu_\psi^4}(u_a k^a)^2 u_a u^a = m^2, \tag{2.51}$$

na qual usamos a álgebra das matrizes gamas: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. Reescrevendo agora a Eq.(2.51) na forma

$$k_\mu k^\mu - k_5^2 - \frac{2}{\mu_\psi^2}(u_5 k^5)^2 - \frac{1}{\mu_\psi^4}(u_5 k^5)^2 u_5^2 = m^2, \tag{2.52}$$

e introduzindo a definição

$$\alpha_\psi = \frac{v}{\mu_\psi}. \tag{2.53}$$

Obtemos finamente,

$$k_\mu k^\mu = m^2 + (1+\alpha_\psi^2)^2 k_5^2. \tag{2.54}$$

Embora a forma da equação acima seja idêntica ao caso do setor escalar e do setor do campo de Calibre, ela é quantitativamente diferente para o fator α muito grande, pois sua intensidade cai com α^4, em vez de α^2, como acontece nos casos anteriores.

Capítulo 3

Estudo da Consistência do Modelo de Maxwell-Éter

Uma das propriedades cruciais do campo de Éter é a dependência de sua densidade de energia associada da geometria do espaço-tempo. Consideremos essa oportunidade, e realizamos um estudo semelhante tal para o setor do campo de calibre representado pela Lagrangeana de Maxwell-Éter, Eq.(2.18), na ausência de fonte externa. Optamos por este setor, principalmente pela riqueza de informações que a teoria do campo eletromagnético pode nos oferecer. Como vimos no capítulo anterior, este setor eletromagnético exibe uma contribuição que exibe modos massivos que (a princípio) possa interferir na unitariedade do modelo. Pretendemos abordar este assunto, através do propagador de Feynmann modificado. (Usamos como consulta em tópicos da teoria de campos os livros [26, 27])

3.1 O Tensor Energia-Momento

O tensor energia-momento é uma quantidade que nos fornece informações sobre o conteúdo de energia e de momento associada a um dado sistema físico. Para o caso eletromagnético, vamos nos concentrar no caso sem fonte. Temos então a expressão que exprime tensor energia-momento da por,

$$T^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a A_c)} \partial^b A_c - \eta^{ab} \mathcal{L}_{\mathcal{A}}. \tag{3.1}$$

A Lagrageana, Eq.(2.18), pode ser reescrita na forma,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} \eta_{fm} \eta^{dn} F_d^{\ m} F_n^{\ f} + \frac{1}{2\mu_A^2} u^d u^f \eta_{cn} F_d^{\ n} F_f^{\ c}. \tag{3.2}$$

Tal que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_a A^c)} = -\frac{1}{4} \eta_{fm} \eta^{dn} \frac{\partial(F_d^{\ m} F_n^{\ f})}{\partial(\partial_a A^c)} + \frac{1}{2\mu_A^2} u^d u^f \eta_{en} \frac{\partial(F_d^{\ n} F_f^{\ e})}{\partial(\partial_a A^c)}. \tag{3.3}$$

Usando a definição de intensidade de campo: F^{ab}, obter expressões do tipo: seguintes identidades:

$$\frac{\partial(\partial_d A^m)}{\partial(\partial_a A^c)} = \delta_{ad}\delta^{cm}. \tag{3.4}$$

Através de caminho, devemos obter

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_a A^c)} = -F^a{}_c + \mu_A^{-2}\left[u^a u^d F_{dc} - u_c u^d F_d{}^a\right]. \tag{3.5}$$

E, encontrando a seguinte estrutura para o tensor energia-momento:

$$T^{ab} = -\eta^{ac}F_{cd}\partial^b A^d + \mu_A^{-2}\left[u^a u^d F_{dc}\partial^b A^c - u_c u^d F_d{}^a\,\partial^b A^c\right] - g^{ab}\mathcal{L}. \tag{3.6}$$

Note que o tensor acima não é simétrico e nem antissimétrico de maneira geral na permutação dos índices: $a \leftrightarrow b$. Entretanto podemos simetrizá-lo pela seguinte razão: tudo que queremos é uma quantidade que satisfaça a seguinte lei de conservação:

$$\partial_a \theta^{ab} = 0. \tag{3.7}$$

Isto implica que podemos adicionar ao T^{ab} qualquer quantidade V^{ab} tal que:

$$\partial a V^{ab} = 0. \tag{3.8}$$

E ainda sim teremos

$$\partial_a \theta^{ab} = \partial_a\big(T^{ab} + V^{ab}\big) = 0. \tag{3.9}$$

3.1.1 Conservação do tensor Energia-Momento

Neste iremos verificar a Eq.(3.9) por método de simetrização. Vamos considera primeiro as identidades:

$$\begin{aligned} F^{db} &= \partial^d A^b - \partial^b A^d \Rightarrow \partial^b A^d = \partial^d A^b - F^{bd},\\ F^{bc} &= \partial^c A^b - \partial^b A^c \Rightarrow \partial^b A^c = \partial^c A^b - F^{bc}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Tal que a Eq.(3.6), toma a forma

$$\begin{aligned} T^{ab} = \eta^{ad}F_{dc}F^{cb} + \mu_A^{-2}\Big[&-u^a u^d F_{dc}F^{cb} + u^a u^d F_{dc}\partial^c A^b \\ &+u_c u^d F_d{}^a F^{cb} - u_c u^d F_d{}^a\,\partial^c A^b\Big] - g^{ad}F_{dc}\partial^c A^b - \eta^{ab}\mathcal{L}_A. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Se definirmos,

$$V^{ab} = \eta^{ad}F_{dc}\partial^c A^b - \mu_A^{-2}\left[u^a u^d F_{dc}\partial^c A^b - u_c u^d F_d{}^a\,\partial^c A^b\right]. \tag{3.12}$$

Podemos ver que

$$\partial_a V^{ac} = \left[\partial_a F^{ac} - \mu_A^{-2}(u_d u^c \partial_a F^{da} - u_d u^a \partial_a F^{dc})\right]\partial_c A^b. \tag{3.13}$$

Usando a Equação de movimento (2.32), onde:

$$\partial_a F^{ac} = \mu_A^{-2} \left(u_d u^c \partial_a F^{da} - u_d u^a \partial_a F^{dc} \right). \tag{3.14}$$

Temos que:

$$\partial_a V^{ac} = \left[\mu_A^{-2} \left(u_d u^c \partial_a F^{da} - u_d u^a \partial_a F^{dc} \right) - \mu_A^{-2} \left(u_d u^c \partial_a F^{da} - u_d u^a \partial_a F^{dc} \right) \right] \partial_c A^b. \tag{3.15}$$

Logo:

$$\partial_a V^{ab} = 0 \tag{3.16}$$

O que é que desejávamos. Por fim, o tensor que obtemos é:

$$\begin{aligned} \theta^{ab} &= T^{ab} + V^{ab} \\ &= \eta^{ad} F_{dc} F^{cb} - \mu_A^{-2} \left(u^a u^d F_{dc} F^{cb} - u_c u^d \eta^{ae} F_{de} F^{cb} \right) + \frac{1}{4} \eta^{ab} F_{cd} F^{cd} - \frac{1}{2\mu_A^2} \eta^{ab} u_c u^d F_{de} F^{ce}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Que representa o tensor Energia-Momento modificado. A conservação do tensor acima pode ser vista pelo auxílio da equação de movimento, Eq.(2.32), e pela identidade de Bianchi: $\partial^a F^{ln} + \partial^n F^{al} + \partial^l F^{na} = 0$.

3.1.2 Análise do Conteúdo de Energia

Sendo o tensor energia-momento com interação do campo tipo éter dado por

$$\Theta^{ab} = \eta^{ad} F_{dc} F^{cb} - \mu_A^{-2} (u^a u^d F_{dc} F^{cb} - u_c u^d \eta^{al} F_{dl} F^{cb}) + \frac{1}{4} \eta^{ab} F_{cd} F^{cd} - \frac{1}{2\mu_A^2} \eta^{ab} u_c u^d F_{dl} F^{cl}, \tag{3.18}$$

que não é simétrico devido os termos entre parênteses, mostrando novamente que, com a interação do éter, não há invariância de Lorentz.

A densidade de energia dada pela componente Θ^{00} é então

$$\begin{aligned} \varepsilon \equiv \Theta^{00} &= \eta^{0d} F_{dc} F^{c0} - \mu_A^{-2} (u^0 u^d F_{dc} F^{c0} - u_c u^d \eta^{0l} F_{dl} F^{c0}) + \frac{1}{4} \eta^{00} F_{cd} F^{cd} - \frac{1}{2\mu_A^2} \eta^{00} u_c u^d F_{dl} F^{cl}, \\ &= \eta^{00} F_{0\nu} F^{\nu 0} + \eta^{00} F_{05} F^{50} + \frac{1}{\mu_A^2} u_\mu u^\nu \eta^{0l} F_{\nu l} F^{\mu 0} + \frac{1}{\mu_A^2} u_5 u^5 \eta^{0l} F_{5l} F^{50} + \frac{1}{4} F_{\mu d} F^{\mu d} \\ &\quad + \frac{1}{4} F_{5d} F^{5d} - \frac{1}{2\mu_A^2} u_\mu u^\nu F_{\nu l} F^{\mu l} - \frac{1}{2\mu_A^2} u_5 u^5 F_{5l} F^{5l}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde foi usado a assinatura métrica $(+ - - - -)$. A partir de agora será usado $u^a = (0, 0, 0, 0, v)$, de modo que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon = F_{0i}F^{i0} + F_{05}F^{50} + \frac{1}{\mu_A^2}u^5u^5\eta^{00}F_{50}F_5{}^0 + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}F_{\mu 5}F^{\mu 5} \\
+\frac{1}{4}F_{5\mu}F^{5\mu} - \frac{1}{2\mu_A^2}u_5u^5F_{5\mu}F_5{}^{\mu}, \\
= -F_{0i}F^{0i} - F_{05}F^{05} - \alpha_A^2F_{50}F^{50} + \frac{1}{4}F_{0\nu}F^{0\nu} + \frac{1}{4}F_{i\nu}F^{i\nu} + \frac{1}{2}F_{\mu 5}F^{\mu 5} \\
+\frac{\alpha_A^2}{2}F_{50}F^{50} + \frac{\alpha_A^2}{2}F_{5i}F^{5i}, \\
= -F_{0i}F^{0i} - F_{05}F^{05} + \alpha_A^2F_{50}F^{50} + \frac{1}{4}F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{4}F_{i0}F^{i0} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}F_{05}F^{05} + \frac{1}{2}F_{i5}F^{i5} \\
+\frac{\alpha_A^2}{2}F_{50}F^{50} + \frac{\alpha_A^2}{2}F_{5i}F^{5i},
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

onde $\alpha_A = \dfrac{v}{\mu_A}$. Agora, lembrando da propriedade antissimétrica do tensor F^{ab} podemos somar alguns termos, assim

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{2}F_{05}F^{05} - \frac{\alpha_A^2}{2}F_{50}F^{50} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}F_{i5}F^{i5} + \frac{\alpha_A^2}{2}F_{5i}F^{5i} \\
&= -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2}\Big(1+\alpha_A^2\Big)F_{05}F^{05} + \frac{1}{2}\Big(1+\alpha_A^2\Big)F_{i5}F^{i5}.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

através da matriz, Eq.(2.3), de modo que se obtém a seguinte representação matricia

Assim a densidade de energia é

$$
\varepsilon = -\frac{1}{2}E_{\hat{i}}E^{\hat{i}} + \frac{1}{4}\varepsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\varepsilon^{\hat{i}\hat{j}\hat{l}}B^{\hat{k}}B_{\hat{l}} + \frac{1}{2}\Big(1+\alpha_A^2\Big)Q^2 + \frac{1}{2}\Big(1+\alpha_A^2\Big)G_{\hat{i}}G^{\hat{i}}, \tag{3.22}
$$

onde será usado a propriedade do símbolo de Levi-Civita $\varepsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\varepsilon^{\hat{i}\hat{j}\hat{l}} = 2\delta^{\hat{l}}_{\hat{k}}$, então

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= -\frac{1}{2}E_{\hat{i}}E^{\hat{i}} + \frac{2}{4}\delta^{\hat{l}}_{k}B^{\hat{k}}B_{\hat{l}} + \frac{1}{2}\Big(1+\alpha_A^2\Big)Q^2 + \frac{1}{2}\Big(1+\alpha_A^2\Big)G^2, \\
&= -\frac{1}{2}E_{\hat{i}}E^{\hat{i}} + \frac{1}{2}B^{\hat{l}}B_{\hat{l}} + \frac{1}{2}\Big(1+\alpha_A^2\Big)Q^2 + \frac{1}{2}\Big(1+\alpha_A^2\Big)G^2.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Finalmente

$$
\varepsilon = \frac{1}{2}\Big(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(1+\alpha_A^2\Big)\Big(Q^2+G^2\Big). \tag{3.24}
$$

considerando que $E_iE^i = \eta^{ii}E_iE_i = -|\vec{E}|^2$, $B_iB^i = \eta^{ii}B_iB_i = -|\vec{B}|^2$ e $G_iG^i = \eta^{ii}G_iG_i = -|\vec{E}|^2$. Note que a Eq.(3.24) apresenta um conteúdo de energia invariante de calibre e fortalecido pela contribuição da dimensão extra sobre o efeito do Éter.

3.2 Propagador de Feynman: a unitariedade

Em teoria quântica de campo, é possível obter informações do sistema olhando a equação de movimento do mesmo. No estudo de interações do sistema, como no caso simples, em que a equação de movimento interage com uma fonte externa, a equação de movimento sofre alterações. Esta interação é descrita via uma função de Green específica, tal qual é conhecida como propagador. No caso do campo eletromagnético esta função é chamada de *propagador de Feynman*.

3.2.1 O Propagador de Feynman

Para obter o propagador, será tomado a densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} + \frac{1}{2\mu_A^2}u^a u^b \eta^{cd} F_{ac}F_{bd} - \frac{1}{2}\alpha \partial_a A^a \partial_b A^b \tag{3.25}$$

onde o último membro da equação acima representa um termo de fixação de calibre, para que o propagador possa ser determinado univocamente.

Desta forma, a ação é

$$S = \int d^5x\, \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}F_{ab}F^{ab} + \frac{1}{\mu_A^2}u^a u^b \eta^{cd} F_{ac}F_{bd} - \alpha \partial_a A^a \partial_b A^b\right] \tag{3.26}$$

onde é possível reescrever o primeiro termo, reescrevendo de forma conveniente os índices somados e usando a antissimetria do tensor intensidade de campo, da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2}F_{ab}F^{ab} = \partial_a A_b \partial^a A^b - \partial_b A_a \partial^a A^b. \tag{3.27}$$

Trabalhando agora o segundo termo de (3.26), tem-se que

$$\begin{aligned} u^a u^b \eta^{cd} F_{ac}F_{bd} &= \eta^{cd} u^a u^b [\partial_a A_c - \partial_c A_a][\partial_b A_d - \partial_d A_b] \\ &= \eta^{cd} u^a u^b \partial_a A_c \partial_b A_d - \eta^{cd} u^a u^b \partial_a A_c \partial_d A_b - \eta^{cd} u^a u^b \partial_c A_a \partial_b A_d + \eta^{cd} u^a u^b \partial_c A_a \partial_d A_b. \end{aligned}$$

Aqui será feito as seguintes mudanças nos índices mudos:

(i) no primeiro termo será trocado $a \leftrightarrow c$ e $b \leftrightarrow d$;

(ii) no segundo termo será trocado $a \leftrightarrow c$;

(iii) no terceiro termo será trovado $b \leftrightarrow d$;

(iv) no quarto termo é mantido. Assim, o resultado obtido será

$$u^a u^b \eta^{cd} F_{ac}F_{bd} = \eta^{ab} u^c u^d \partial_c A_a \partial_d A_b - \eta^{ad} u^c u^b \partial_c A_a \partial_d A_b - \eta^{cb} u^a u^d \partial_c A_a \partial_d A_b + \eta^{cd} u^a u^b \partial_c A_a \partial_d A_b.$$

Substituindo Eq.(3.27) e Eq.(3.2.1) em Eq.(3.26), obtém-se

$$\begin{aligned} S = \int d^5x\, \frac{1}{2}\big[\partial_b A_a \partial^a A^b - \partial_a A_b \partial^a A^b + \frac{1}{\mu_A^2}\big(&\eta^{ab} u^c u^d \partial_c A_a \partial_d A_b - \eta^{ad} u^c u^b \partial_c A_a \partial_d A_b \\ &-\eta^{cb} u^a u^d \partial_c A_a \partial_d A_b + \eta^{cd} u^a u^b \partial_c A_a \partial_d A_b\big) - \alpha \partial_a A^a \partial_b A^b\big]. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Aqui serão feitas as seguintes considerações: usando a derivada do produto, é possível escrever

$$\partial_b A_a \partial^a A^b = \partial_b \big(A_a \partial^a A^b \big) - A_a \partial_b \partial^a A^b, \tag{3.29}$$

de modo que ao substituir a equação acima na Eq.(3.28), notando que o primeiro termo (termos de superfície) de cada equação se anulará ao integrar no contorno, e fazendo $\alpha = 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} S = \int d^5x \, \frac{1}{2} \big[A_b \partial_a \partial^a A^b - A_a \partial_b \partial^a A^b + \frac{1}{\mu_A^2} \big(- \eta^{ab} u^c u^d A_a \partial_c \partial_d A_b + \eta^{ad} u^c u^b A_a \partial_c \partial_d A_b \\ + \eta^{cb} u^a u^d A_a \partial_c \partial_d A_b - \eta^{cd} u^a u^b A_a \partial_c \partial_d A_b \big) + A^a \partial_a \partial^b A_b \big], \end{aligned} \tag{3.30}$$

onde o segundo e o último termo se anulam, assim

$$\begin{aligned} S = \int d^5x \, \frac{1}{2} \big[A_b \partial_a \partial^a A^b - \frac{1}{\mu_A^2} \big(\eta^{ab} u^c u^d A_a \partial_c \partial_d A_b - \eta^{ad} u^c u^b A_a \partial_c \partial_d A_b \\ - \eta^{cb} u^a u^d A_a \partial_c \partial_d A_b + \eta^{cd} u^a u^b A_a \partial_c \partial_d A_b \big) \big]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Usando a métrica, tem-se que

$$A_b \partial_a \partial^a A^b = A_a \partial_b \partial^b \eta^{ac} A_c, \tag{3.32}$$

como os índices b e c podem ser trocados, por estarem somados, temos

$$A_b \partial_a \partial^a A^b = \eta^{ab} A_a \partial_c \partial^c A_b. \tag{3.33}$$

Tem-se também que

$$A_a \partial_b \partial^a A^b = A_a \partial^b \partial^a A_b, \tag{3.34}$$

de modo que a ação (3.31), pode ser escrita como

$$S = \int d^5x \, \frac{1}{2} A_a \big[\eta^{ab} \partial_c \partial^c - \frac{1}{\mu_A^2} \big(\eta^{ab} u^c u^d \partial_c \partial_d - \eta^{ad} u^c u^b \partial_c \partial_d - \eta^{cb} u^a u^d \partial_c \partial_d + \eta^{cd} u^a u^b \partial_c \partial_d \big) \big] A_b, \tag{3.35}$$

sendo possível reescrever da seguinte forma:

$$S = \int d^5x \, \frac{1}{2} A_a \Delta^{ab} A_b, \tag{3.36}$$

onde o termo $\Delta^{ab} = \eta^{ab} \partial_c \partial^c - \frac{1}{\mu_A^2} \big(\eta^{ab} u^c u^d \partial_c \partial_d - \eta^{ad} u^c u^b \partial_c \partial_d - \eta^{cb} u^a u^d \partial_c \partial_d + \eta^{cd} u^a u^b \partial_c \partial_d \big)$ é o núcleo da ação, e uma vez que esse operador atue em uma função de Green, de modo a obter

$$\Delta^{ab} (\Delta_F)_{cb}(x-y) = \delta^a_c \delta^5(x-y), \tag{3.37}$$

tal função de Green $(\Delta_F)_{cb}(x-y)$ é o propagador modificado deste modelo.

Então

$$\big[\eta^{ab} \partial_c \partial^c - \frac{u^a u^b}{\mu_A^2} \partial_c \partial^c + \frac{u^a u^c}{\mu_A^2} \partial_c \partial^b + \frac{u^c u^b}{\mu_A^2} \partial_c \partial^a - \eta^{ab} \frac{u^c u^d}{\mu_A^2} \partial_c \partial_d \big] (\Delta_F)_{cb}(x-y) = \delta^a_c \delta^5(x-y), \tag{3.38}$$

que pode ser reescrito no espaço dos momentos, notando que

$$(\Delta_F)_{cb}(x-y) = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5}(\Delta_F)_{cb}(k)e^{-ik\cdot(x-y)} \tag{3.39}$$

e

$$\delta^5(x-y) = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5}e^{-ik\cdot(x-y)} \tag{3.40}$$

de modo que

$$\begin{aligned}[\eta^{ab}\partial_c\partial^c + \frac{u^a u^b}{\mu_A^2}\partial_c\partial^c - \frac{u^a u^c}{\mu_A^2}\partial_c\partial^b - \frac{u^c u^b}{\mu_A^2}\partial_c\partial^a + \eta^{ab}\frac{u^c u^d}{\mu_A^2}\partial_c\partial_d](\Delta_F)_{cb}(x-y)&\\ = \delta^a_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}.&\end{aligned} \tag{3.41}$$

Notando que

$$\partial_a(\Delta_F)_{cb}(x-y) = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5}(\Delta_F)_{cb}(k)(-ik_a)e^{-ik\cdot(x-y)} \tag{3.42}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}\int \frac{d^5k}{(2\pi)^5}[-\eta^{ab}k_ck^c + \frac{u^a u^b}{\mu_A^2}k_ck^c - \frac{u^a u^c}{\mu_A^2}k_ck^b - \frac{u^c u^b}{\mu_A^2}k_ck^a + \eta^{ab}\frac{u^c u^d}{\mu_A^2}k_ck_d](\Delta_F)_{cb}(k)e^{-ik\cdot(x-y)}&\\ = \delta^a_c \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5}e^{-ik\cdot(x-y)}.&\end{aligned} \tag{3.43}$$

Observando a equação acima, nota-se que

$$\big[-\eta^{ab}k_ck^c + \frac{u^a u^b}{\mu_A^2}k_ck^c - \frac{u^a u^c}{\mu_A^2}k_ck^b - \frac{u^c u^b}{\mu_A^2}k_ck^a + \eta^{ab}\frac{u^c u^d}{\mu_A^2}k_ck_d\big](\Delta_F)_{cb}(k) = \delta^a_c. \tag{3.44}$$

Agora, definindo $\tilde{k}^2 := k_ck^c - \frac{u^c u^d}{\mu_A^2}k_ck_d$ e $\tilde{k}^a := \frac{u^a u^c}{\mu_A^2}k_c$, a equação acima torna-se

$$\big[-\eta^{\mu\nu}\tilde{k}^2 + \frac{u^a u^b}{\mu_A^2}k^2 - \tilde{k}^a k^b - \tilde{k}^b k^a\big](\Delta_F)_{cb}(k) = \delta^a_c, \tag{3.45}$$

onde se está ciente que $k^2 = k_ck^c$ m cinco dimensões. Então, tomando o seguinte *ansatz*:

$$(\Delta_F)_{cb} = A\eta_{cb} + B\frac{u_c u_b}{\mu_A^2} + C\tilde{k}_c k_b + D\tilde{k}_b k_c. \tag{3.46}$$

Substituindo (3.46) em (3.45), o resultado será

$$\begin{aligned}-A\delta^c_a\tilde{k}^2 - B\frac{u_c u^a}{\mu_A^2}\tilde{k}^2 - C\tilde{k}^2\tilde{k}_\lambda k^a - D\tilde{k}^2\tilde{k}^a k_c + A\frac{u^a u_c}{\mu_A^2}k^2 + B\frac{u^a u_c}{\mu_A^4}u^b u_b k^2&\\ +C\tilde{k}_c k_b\frac{u^a u^b}{\mu_A^2}k^2 + D\tilde{k}_b k_c\frac{u^a u^b}{\mu_A^2}k^2 - A\tilde{k}^a k_c - B\tilde{k}^a k^b\frac{u_c u_b}{\mu_A^2} - C\tilde{k}_c K_b\tilde{k}^a k^b&\\ -D\tilde{k}_b k_c\tilde{k}^a k^b - A\tilde{k}_c k^a - B\frac{u_c u_b}{\mu_A^2}\tilde{k}^b k^a - C\tilde{k}_c k_b\tilde{k}^b k^a - D\tilde{k}_b k_c\tilde{k}^b k^a = \delta^c_a.&\end{aligned} \tag{3.47}$$

A Eq.(3.47) proporciona sete equações com quatro incógnitas, isto é

$$-A\delta^a_c\tilde{k}^2 = \delta^a_c; \tag{3.48}$$

$$-\frac{u_c u^a}{\mu_A^2}(B\tilde{k}^2 - Ak^2) = 0; \tag{3.49}$$

$$-(A + D\tilde{k}^2)\tilde{k}^a k_c = 0; \tag{3.50}$$

$$-(A + C\tilde{k}^2)\tilde{k}_c k^a = 0; \tag{3.51}$$

$$\frac{u^a u^b}{\mu_A^2}k^2\Big(B\frac{u_c u_b}{\mu_A^2} + C\tilde{k}_c k_b + Dk_b\tilde{k}_c\Big) = 0; \tag{3.52}$$

$$-\tilde{k}^a k^b\Big(B\frac{u_c u_b}{\mu_A^2} + C\tilde{k}_c k_b + Dk_b\tilde{k}_c\Big) = 0; \tag{3.53}$$

$$-\tilde{k}^b k^a\Big(B\frac{u_c u_b}{\mu_A^2} + C\tilde{k}_c k_b + Dk_b\tilde{k}_c\Big) = 0, \tag{3.54}$$

embora só quatro equações sejam úteis, pois três das sete nos dizem a mesma coisa.

Da primeira equação, obtém-se

$$A = -\frac{1}{\tilde{k}^2}, \tag{3.55}$$

enquanto que da segunda equação, tem-se que

$$B = -\frac{k^2}{\tilde{k}^2\tilde{k}^2}, \tag{3.56}$$

já da terceira equação

$$D = \frac{1}{\tilde{k}^2\tilde{k}^2} \tag{3.57}$$

e da quarta equação, obtém-se

$$C = \frac{1}{\tilde{k}^2\tilde{k}^2}. \tag{3.58}$$

Finalmente, substituindo estes resultados em (3.46), obtém-se a função de Green que é o propagador de Feynman modificado deste modelo, isto é

$$(\Delta_F)_{cb} = -\frac{1}{\tilde{k}^2}\Big(\eta_{cb} + \frac{u_c u_b}{\mu_A^2}\frac{k^2}{\tilde{k}^2} - \frac{\tilde{k}_c k_b}{\tilde{k}^2} - \frac{\tilde{k}_b k_c}{\tilde{k}^2}\Big), \tag{3.59}$$

ou melhor

$$\begin{aligned}(\Delta_F)_{cb} = -\frac{1}{k_a k^a - \frac{u^a u^d}{\mu_A^2}k_a k_d}\Bigg(\eta_{cb} &+ \frac{u_c u_b}{\mu_A^2}\frac{k_a k^a}{k_a k^a - \frac{u^a u^d}{\mu_A^2}k_a k_d} - \frac{u_a u_c}{\mu_A^2}\frac{k^a k_b}{k_a k^a - \frac{u^a u^d}{\mu_A^2}k_a k_d} \\ &- \frac{u_a u_b}{\mu_A^2}\frac{k^a k_c}{k_a k^a - \frac{u^a u^d}{\mu_A^2}k_a k_d}\Bigg).\end{aligned} \tag{3.60}$$

3.2.2 O Propagador de Feynman Saturado

Uma questão de grande relevância em um modelo, é saber se o mesmo preserva a propriedade de unitariedade. Para essa verificação, o propagador será saturado com correntes conservadas, $k_a J^a = 0$, isto é

$$PS \equiv J^c (\Delta_F)_{cb} J^b, \tag{3.61}$$

de modo que o resultado será

$$PS = -\frac{1}{k_a k^a - \dfrac{u^a u^d}{\mu_A^2} k_a k_d} \left(J_b J^b + \frac{J^c u_c u_b}{\mu_A^2} \frac{k_a k^a J^b}{k_a k^a - \dfrac{u^a u^d}{\mu_A^2} k_a k_d} \right). \tag{3.62}$$

A propriedade de unitariedade é assegurada se o resíduo do propagador saturado PS calculado em seus polos for maior que zero pra os modos de propagação. Tomando $u^a = (0,0,0,0,v)$, $k^a = (k^0, 0, 0, 0, k^5)$, $J^a = (j^0, J^1, J^2, J^3, \frac{k_0 j_0}{k_5})$, de modo que

$$\begin{aligned} PS &= -\frac{1}{k_a k^a - \dfrac{u^5 u^5}{\mu_A^2} k_5 k_5} \left(J_b J^b + \frac{J^5 u_5 u_5}{\mu_A^2} \frac{k_a k^a J^5}{k_a k^a - \dfrac{u^5 u^5}{\mu_A^2} k_5 k_5} \right) \\ &= -\frac{1}{k_a k^a - \alpha_A^2 k_5^2} \left(J_b J^b + \alpha_A^2 \frac{k_a k^a J_5^2}{k_a k^a - \alpha_A^2 k_5^2} \right) \\ &= -\left(\frac{J_b J^b (k_a k^a - \alpha_A^2 k_5^2) + \alpha_A^2 k_a k^a J_5^2}{(k_a k^a - \alpha_A^2 k_5^2)^2} \right). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Tomando o denominador igual a zero, obtemos o pólo

$$\begin{aligned} k_a k^a - \alpha_A^2 k_5^2 &= 0 \\ k_a k^a &= \alpha_A^2 k_5^2, \end{aligned} \tag{3.64}$$

onde será renomeado $m_+^2 = \alpha_A^2 k_5^2$.

O resíduo do propagador saturado é dado por

$$R_0 = \lim_{z \to p} \frac{\partial}{\partial z} \big[(z-p)^2 f(z) \big].$$

Sendo $z = k_a k^a$, $p = m_+^2$ o polo de $f(k_a k^a) = PS$, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[PS]_{k_a k^a = m_+^2} &= \lim_{k_a k^a \to m_+^2} \frac{\partial}{\partial (k_a k^a)} \left[(k_a k^a - m_+^2)^2 \left(\frac{-J_b J^b (k_a k^a - \alpha_A^2 k_5^2) - \alpha_A^2 k_a k^a J_5^2}{(k_a k^a - \alpha_A^2 k_5^2)^2} \right) \right] \\ &= \lim_{k_a k^a \to m_+^2} \frac{\partial}{\partial (k_a k^a)} \big(- J_b J^b (k_a k^a - \alpha_A^2 k_5^2) - \alpha_A^2 k_a k^a J_5^2 \big) \\ &= \lim_{k_a k^a \to m_+^2} \big(- J_b J^b - \alpha_A^2 J_5^2 \big) \\ &= -J_b J^b - \alpha_A^2 J_5^2. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Em termos de componentes

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[PS]_{k_a k^a = m_+^2} &= -(J_0 J^0 + J_1 J^1 + J_2 J^2 + J_3 J^3 + J_5 J^5) - \alpha_A^2 J_5^2 \\ &= -J_0^2 + (1-\alpha_A^2) j_5^2 + (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2),\end{aligned} \tag{3.66}$$

de modo que usando a conservação da corrente, finalmente obtém-se

$$\mathrm{Res}[PS]_{k_a k^a = m_+^2} = \left[(1-\alpha_A^2)\frac{k_0^2}{k_5^2} - 1\right] J_0^2 + (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2). \tag{3.67}$$

O resíduo dado pela a Eq.(3.67) poderá ser positivo, desde que tenhamos a contribuição do primeiro termo seja menor do que $(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)$.

Capítulo 4

Conclusão e Perspectivas

Nesta dissertação, estudamos os efeitos da presença do campo éter em dimensões extras, de modo que foi possível perceber a introdução de novos efeitos no esquema de compactação Kaluza-Klein. O efeito mais óbvio é a possibilidade de torres KK com massas substancialmente diferentes para espécies diferentes. Enquanto as separações de massa escalar e bóson de calibre seguem um padrão similar, os férmions experimentam maior valorização.

Para o setor do campo de calibre, os efeitos da LIV foram introduzidos pela interação do campo éter, que nesse contexto se comporta como um pano de fundo. Mesmo Neste caso, a densidade de lagrangeana preserva a invariância de calibre. Obtivemos as equações de movimento e o propagador de Feynman associados. No caso do propagador modificado, verificamos que os efeitos da LIV devido o campo éter não altera a propriedade de unitariedade da teoria. Verificamos ainda que a relação de dispersão é modificada, onde foi possível caracterizar um meio a partir da interação do campo éter.

Ainda no setor do campo de calibre, obtivemos o tensor energia-momento que não é simétrico, o que ressalta a presença da LIV; e estudamos o conteúdo de energia que se apresenta invariante de calibre e fortalecida pela contribuição da dimensão extra e pelo campo éter.

Nossa investigação tem sido de natureza fenomenológica; não temos uma teoria subjacente do campo éter nem qualquer expectativa natural para as magnitudes dos parâmetros v, μ_i e. A possibilidade de uma dimensão oculta do tamanho de um milímetro requer uma hierarquia substancial, $\dfrac{v}{\mu_i} \sim 10^{15}$; mesmo na ausência de números tão grandes, no entanto, as interações com o éter podem levar a efeitos sutis, porém importantes. Certamente seria interessante ter uma compreensão mais profunda da possível origem desses campos e acoplamentos.

Inúmeras questões continuam a ser abordadas. Embora tenha sido considerado um campo vetorial em uma única dimensão extra, tensores de maior hierarquia em múltiplas dimensões devem levar a efeitos análogos. A ideia de relações de dispersão extra-dimensionais modificadas na presença de campos tensoriais violadores de Lorentz abre uma variedade de possibilidades que merecem maior exploração.

Uma extensão imediata do presente trabalho é a de estudar as propriedades termodinâmicas, principalmente para o gás de fóton sob a ação da compactação do campo éter. Nesse caso, prevemos modificações nas equações de estado termodinâmicas que por sua vez porão ser utilizadas para estudo dos problemas da cosmologia através das equações de Friedmann.

Outra perspectiva é tornar compatível esse estudo de compactação do éter ao cenário de branas e gerar novos resultados.

Referências Bibliográficas

[1] V. A. Kostelecky, "Topics in Lorentz and CPT violation," in *The role of neutrinos, strings, gravity, and variable cosmological constant in elementary particle physics. Proceedings, 29th International Conference on high energy physics and cosmology, Orbis Scientiae, Coral Gables, USA, December 14-17, 2000*, pp. 57–68, 2001.

[2] A. Ashtekar, "New variables for classical and quantum gravity," *Physical Review Letters*, vol. 57, no. 18, p. 2244, 1986.

[3] C. Rovelli, "Loop quantum gravity," *Living reviews in relativity*, vol. 11, no. 1, p. 5, 2008.

[4] V. A. Kosteleckỳ and S. Samuel, "Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory," *Physical Review D*, vol. 39, no. 2, p. 683, 1989.

[5] D. Colladay and V. A. Kostelecky, "Lorentz violating extension of the standard model," *Phys. Rev.*, vol. D58, p. 116002, 1998.

[6] R. C. Myers and M. Pospelov, "Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 211601, 2003.

[7] P. Horava, "Membranes at Quantum Criticality," *JHEP*, vol. 03, p. 020, 2009.

[8] S. M. Carroll and H. Tam, "Aether Compactification," *Phys. Rev.*, vol. D78, p. 044047, 2008.

[9] T. G. Rizzo, "Lorentz violation in extra dimensions," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2005, no. 09, p. 036, 2005.

[10] T. Jacobson and D. Mattingly, "Gravity with a dynamical preferred frame," *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 024028, Jun 2001.

[11] T. Jacobson, "Einstein-aether gravity: A Status report," *PoS*, vol. QG-PH, p. 020, 2007.

[12] C. Eling and T. Jacobson, "Spherical solutions in einstein-aether theory: static aether and stars," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 23, no. 18, p. 5625, 2006.

[13] D. Garfinkle, C. Eling, and T. Jacobson, "Numerical simulations of gravitational collapse in einstein-aether theory," *Phys. Rev. D*, vol. 76, p. 024003, Jul 2007.

[14] E. Barausse, T. Jacobson, and T. P. Sotiriou, "Black holes in einstein-aether and hořava-lifshitz gravity," *Phys. Rev. D*, vol. 83, p. 124043, Jun 2011.

[15] T. Yu. Alpin and A. B. Balakin, "The EinsteinMaxwell-aether-axion theory: Dynamo-optical anomaly in the electromagnetic response," *Int. J. Mod. Phys.*, vol. D25, no. 04, p. 1650048, 2016.

[16] M. Gürses and e. Sentürk, "Gödel-type metrics in Einstein-Aether theory II: nonflat background in arbitrary dimensions," *Gen. Rel. Grav.*, vol. 48, no. 5, p. 63, 2016.

[17] T. G. Rizzo, "Lorentz violation in extra dimensions," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2005, no. 09, p. 036, 2005.

[18] L. Ackerman, S. M. Carroll, and M. B. Wise, "Imprints of a primordial preferred direction on the microwave background," *Phys. Rev. D*, vol. 75, p. 083502, Apr 2007.

[19] S. M. Carroll and H. Tam, "Aether compactification," *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 044047, Aug 2008.

[20] A. Chatrabhuti, P. Patcharamaneepakorn, and P. Wongjun, "her field, casimir energy and stabilization of the extra dimension," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2009, no. 08, p. 019, 2009.

[21] S. M. Carroll, T. R. Dulaney, M. I. Gresham, and H. Tam, "Instabilities in the aether," *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 065011, Mar 2009.

[22] W. Donnelly and T. Jacobson, "Stability of the aether," *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 081501, Oct 2010.

[23] A. F. Santos and F. C. Khanna, "Aether field in extra dimensions: Stefan-boltzmann law and casimir effect at finite temperature," *Phys. Rev. D*, vol. 95, p. 025021, Jan 2017.

[24] V. A. Andreev and D. Y. Tsipenyk, "The Mass and Size of Photons in the 5-Dimensional Extended Space Model," *Journal of Modern Physics*, vol. 7, pp. 1308–1315, 2016.

[25] E. Passos, M. Anacleto, F. Brito, O. Holanda, G. Souza, and C. Zarro, "Lorentz invariance violation and simultaneous emission of electromagnetic and gravitational waves," *Physics Letters B*, vol. 772, pp. 870 – 876, 2017.

[26] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics; 3rd ed.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999.

[27] D. Bromley and W. Greiner, *Classical Electrodynamics*. Classical Theoretical Physics, Springer New York, 2012.