



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Sérgio da Silva Cruz

**Correção não-comutativa da entropia do
Buraco Negro de Schwarzschild com o princípio
da incerteza generalizado (GUP)**

Campina Grande, Paraíba, Brasil

23 de setembro de 2021

Sérgio da Silva Cruz

**Correção não-comutativa da entropia do Buraco Negro
de Schwarzschild com o princípio da incerteza
generalizado (GUP)**

Dissertação realizada sob orientação do Prof.
Dr. Marcos Antônio Anacleto, apresentada à
Unidade Acadêmica de Física em compleme-
tação aos requisitos para obtenção do título
de Mestre em Física.

Orientador: Marcos Antônio Anacleto

Campina Grande, Paraíba, Brasil

23 de setembro de 2021

Dedico esse trabalho à minha família, que me deu todo apoio para que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

- Ao Prof. Marcos Anacleto, pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho;
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação;
- Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo;
- Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- A CAPES pelo suporte financeiro;
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho;
- Aos Profs. Joseclécio Dutra e Pedro Segundo pelo apoio incondicional;
- Aos Alcoólicos anônimos por terem me dado o apoio necessário para que eu tivesse a chance de viver uma nova vida.

*Sonho que se sonha só
é só um sonho que se sonha só,
mas sonho que se sonha junto é realidade.
(Raul Seixas)*

Resumo

A teoria da relatividade geral prevê equações de campo cujas soluções descrevem os buracos negros. Podemos citar o buraco negro de Schwarzschild como sendo uma dessas soluções. Este tipo de solução que no caso é exterior representa a deformação do espaço-tempo devido a uma distribuição de massa esfericamente simétrica. Em determinadas regiões na ordem da escala de Planck a idéia de ponto não existe e, portanto, determinar o local exato de uma partícula se torna uma tarefa impossível. A perda de localidade implica no princípio da incerteza de Heisenberg para as coordenadas, o que traz à tona a necessidade de uma correção da solução para uma solução que comporte a não-comutatividade. A essa solução damos o nome de solução de Schwarzschild não-comutativa. Neste trabalho, por meio do formalismo de tunelamento, estudamos o efeito da não-comutatividade para a radiação Hawking e entropia do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo. Em nosso modelo estamos considerando a não comutatividade via distribuição Lorentziana para obtermos correções não-comutativas para a temperatura Hawking usando o método de Hamilton-Jacobi e a aproximação de Wentzel-Kramers-Brillouin(WKB). Além disso, encontramos correções do tipo logarítmico e outros tipos devido a não-comutatividade e ao princípio da incerteza generalizado(GUP) para a entropia do buraco negro de Schwarzschild.

Palavras-chave: Buraco Negro de Schwarzschild. Não-comutatividade. Propriedades termodinâmicas de Buracos Negros.

Abstract

The general theory of relativity predicts field equations whose solutions describe black holes. We can cite Schwarzschild's black hole as one of these solutions. This type of solution represents the deformation of space-time due to a spherically symmetric mass distribution. In certain regions with Planck scale order, the idea of a point does not exist, so determining the exact location of a particle becomes an impossible task. The loss of locality implies the Heisenberg uncertainty principle for the coordinates, which highlights the need for a solution correction for a solution that includes non-commutativity. We call this solution the non-commutative Schwarzschild solution. In this work, through tunneling formalism, we will study the effect of non-commutativity for Hawking radiation and non-commutative Schwarzschild black hole entropy. In our model we considered non-commutativity via Lorentzian distribution to obtain non-commutative corrections for Hawking temperature using the Hamilton-Jacobi method and the Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) approximation. In addition, we find corrections of the logarithmic type and other types due to non-commutativity and the generalized uncertainty principle (GUP) for Schwarzschild black hole entropy.

Keywords: Schwarzschild Black Hole. Noncommutativity. Thermodynamic Properties of Black Holes.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Equilíbrio de forças internas em uma estrela. Fonte: google imagens, 2020.	19
Figura 2 – Imagem ilustrativa de um buraco negro capturando matéria de uma estrela vizinha. Fonte: google imagens, 2020.	20
Figura 3 – Buraco negro que fica no centro da galáxia M87. Fonte: EHT 2020. . .	21
Figura 4 – Curvatura do espaço-tempo. Fonte: T.Pyle/Caltech/MIT/LIGO Lab. .	23
Figura 5 – Trajetória tipo-tempo nas coordenadas de Schwarzschild. Fonte: D’inverno, 2014	27
Figura 6 – Espectro eletromagnético. Fonte: google imagens, 2020.	28
Figura 7 – A Solução de Schwazschild não-comutativa. Fonte: Nicolini, 2009 . . .	45

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	BURACOS NEGROS	19
2.1	Características e Detecção de Buracos Negros	19
2.2	Relatividade Geral	21
2.2.1	Campo Gravitacional	22
2.2.2	As equações de Einstein	23
2.2.3	Equação da Geodésica	25
2.3	Buracos Negros de Schwarzschild	25
2.4	Buracos Negros de Reissner-Nordström	28
2.5	Buracos Negros de Kerr	30
2.6	Buracos Negros BTZ	32
2.7	Termodinâmica dos Buracos Negros	34
2.8	Termodinâmica na métrica de Schwarzschild	36
3	NÃO-COMUTATIVIDADE	39
3.1	Espaço-tempo não-comutativo e princípio da incerteza generalizado (GUP)	39
3.2	Problema de Landau	40
3.3	Produto Estrela	42
3.4	Métrica de Schwarzschild não-comutativa	44
4	TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD NÃO-COMUTATIVO	47
4.1	Correções não-comutativas	47
4.2	Entropia estatística	50
5	CONCLUSÕES	55
	REFERÊNCIAS	57

1 Introdução

As estrelas são formadas quando uma imensa nuvem de gás se concentra ficando cada vez menor e mais quente. As partes mais externas da nuvem começam a cair em direção ao centro, com isso a parte mais interna da nuvem esquenta cada vez mais transformando-se em um enorme reator nuclear [1].

Durante um período bastante longo a estrela usa hidrogênio como combustível em sua fusão nuclear. Depois que ela consome todo seu suprimento de hidrogênio central ela passa a mover-se no diagrama HR (Relação existente entre a luminosidade de uma estrela e sua temperatura efetiva) em direção à região das estrelas gigantes vermelhas. Nesse momento a região central constitui-se basicamente de Hélio e não produz mais energia alguma. No entanto a estrela continua irradiando energia pela sua superfície[2].

Existem vários tipos de estrelas mortas: Anãs Brancas, Estrelas de Nêutrons, Buracos Negros Estelares etc. Vejamos por exemplo, as Anãs Brancas e as Estrelas de Nêutrons, ambas têm um limite superior para sua massa. Estrelas de nêutrons, por exemplo, tem limite superior para a massa: $M_n < 3M_{sol}$, damos a esse limite o nome de Limite de Tolman- Oppenheimer- Volkoff. Se uma estrela de nêutrons tiver uma massa maior do que o limite de três vezes a massa solar, ela entra em colapso se transformando em um buraco negro[3].

No ano de 1783 surge a ideia de buraco negro através do astrônomo britânico John Michell que baseado na física Newtoniana afirmou que poderiam existir estrelas tão compactas e com massas tão grandes que a velocidade de escape do seu campo gravitacional seria maior que a velocidade da luz.[4] Naquela época esse conceito não foi muito aceito, porém, no século XX logo após a formulação da teoria da relatividade geral (TRG) por Albert Einstein em 1915 [5], foi determinada pelo físico Karl Schwarzschild(2015/16), uma solução para as equações de Einstein, soluções essas validas apenas para um campo exterior a um determinado objeto sem de rotação.

Segundo a literatura, Schwarzschild estava internado em um hospital com problemas de pele em plena guerra mundial ao encontrar a tão famosa solução para as equações de Einstein que hoje leva o seu nome. Em uma carta enviada à Einstein, datada de 22 de Dezembro de 1915, ele diz que teve tempo para passear pela terra das ideias[6], dessas ideias sugira o buraco negro de Schwarzschild.

A lei de Newton nos diz que a aceleração da gravidade é dada por $g(r) = GM/r^2$, ou seja, a aceleração é proporcional a massa e inversamente proporcional ao quadrado da

distância. A solução de Schwarzschild para a gravidade acrescenta a correção

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/(rc^2)}} \quad (1.1)$$

tal que se a distância r for muito grande (mais propriamente $2GM/(rc^2) \ll 1$), obtém-se a lei de Newton da gravitação $g(r) = M/r^2$. Por outro lado, se o raio diminui, isto é, $2GM/rc \sim 1$, o termo $2GM/(rc^2)$ aumenta podendo se aproximar de 1, aumentando assim a correção sobre a fórmula de Newton e quando o raio é exatamente $r_s = 2GM/c^2$, tem-se uma divergência na equação[6]. Esse é o raio de Schwarzschild, uma região de divergência da gravidade.

A métrica de Schwarzschild só é válida quando o momento angular é nulo. Porém, outras soluções tais como: solução de Reissner-Nordström, solução de Kerr, etc. leva em consideração outras características para os buracos negros. Uma dessas soluções foi determinada pelos físicos Máximo Banados, Claudio Teitelboim e Jorge Zanelli (BTZ) [7], considerando uma constante cosmológica negativa. Além do mais, Anacleto, Brito e Passos (2015) [8] fizeram um estudo no efeito Aharonov-Born gravitacional devido ao buraco negro BTZ num fundo não-comutativo. As propriedades termodinâmicas dos buracos negros BTZ carregados são estudados também por Hendi Panahiyan e Mamasani (2015)[9].

Na década de 70 o Físico Jacobi Bekenstein propôs que se os buracos negros são regiões do universo de onde nada escapa, logo seria possível violar a segunda lei da termodinâmica que diz que a entropia em um sistema fechado deve sempre aumentar com o tempo ou nunca diminuir, assim através de um experimento mental, Bekenstein atrelou uma entropia a área do horizonte de eventos de um buraco negro [10].

Stephen Hawking se propôs a mostrar que não fazia sentido algum essa associação, nem mesmo em termos quânticos, porque para se obter uma entropia de um determinado objeto é necessário associar uma temperatura ao mesmo, porém, para sua surpresa, Hawking percebeu que quando se associa ingredientes quânticos num espaço tempo onde houve a formação de um buraco negro se associa uma emissão de radiação (Radiação Hawking). Esta informação mostra que na formação de um buraco negro observadores afastados detectam radiação proveniente desse objeto e mais ainda, mostra que os buracos negros eventualmente evaporam [11]. Diante de tais evidências Hawking admitiu que Bekenstein estava certo afinal. Nascia então a área da física denominada de termodinâmica dos buracos negros[12].

Acredita-se que todo objeto termodinâmico tem características que emergem de graus de liberdade microscópicos. Como o buraco negro a princípio é uma região de vazio onde nada escapa, especula-se que para se entender esses graus de liberdade é preciso ter uma teoria quântica da gravidade, podendo assim associar esses graus de liberdade a quantização da área.

Existem varias formas de se obter as radiação Hawking e a entropia dos buracos negros. Fazendo uso do método de Hamilton – Jacobi, Anacleto *et al* (2018)[13] considerou o principio da incerteza generalizada (GUP) no formalismo de tunelamento da radiação Hawking para estudar as correções quânticas na entropia e temperatura Hawking do buraco negro de Schwarzschild não comutativo.

Neste trabalho, tomando como base todas essas contribuições, usaremos o método de Hamilton-Jacobi para determinar a entropia do Buraco Negro de Schwarzschild não-comutativo via princípio da incerteza generalizado e levando em consideração uma aproximação WKB no formalismo de tunelamento. Para isso, dividimos o trabalho em alguns capítulos. No capítulo 2, descrevemos os buracos negros, como surgem na relatividade, detalhamos algumas soluções de buracos negros e a necessidade da termodinâmica do Buraco Negro. No capítulo 3, realizamos alguns cálculos e considerações sobre o espaço-tempo não-comutativo, problemas da métrica de Schwarzschild no espaço não-comutativo, No capítulo 4, apresentamos a termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo e o resultado da entropia estatística. No capítulo 5, há as conclusões desse trabalho onde com o uso do método de Hamilton-Jacobi e da aproximação WKB encontramos correções para a temperatura Hawking e devido a não comutatividade e ao principio da incerteza generalizado (GUP) determinamos correções do tipo logarítmica para a entropia verificando a existência de Buracos Negros Remanescentes.

2 Buracos Negros

Os Buracos Negros são objetos extremamente densos que produzem um campo gravitacional tão forte que distorce o espaço tempo à sua volta fazendo com que nada escape da região criada por ele. O nome vem das propriedades que o define. Buraco se refere à curvatura que o mesmo impõe ao espaço-tempo onde nada que ultrapasse a membrana fictícia que o delimita a qual denominamos de horizonte de eventos pode escapar. Negro remete ao fato que nem mesmo a luz escapa da região interna ao horizonte de eventos [14].

O Buraco Negro nasce quando um determinado corpo perde a pressão suficiente para produzir uma força centrífuga que contrabalanceie o peso de suas camadas externas como mostra a figura 1, esse objeto entra em colapso a um ponto que chamamos de singularidade onde a densidade tende ao infinito.

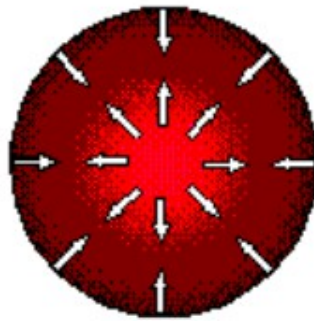


Figura 1 – Equilíbrio de forças internas em uma estrela. Fonte: google imagens, 2020.

Esse objeto físico é invisível e só pode ser observado pela ação do seu campo gravitacional.

2.1 Características e Detecção de Buracos Negros

As características desses buracos negros são fenômenos físicos preditos na Teoria da relatividade geral (TRG) que são observados na natureza devido ao seu enorme campo gravitacional, como distorções do espaço e do tempo ao seu redor. Mesmo existindo muitos aspectos incomuns em corpos normais esses objetos possuem propriedades tais como: massa, carga elétrica e momento angular.

Na natureza existem dois tipos de buracos negros: Buracos negros estelares e buracos negros super massivos.

Buracos negros estelares: São aqueles formados mediante o colapso de uma única estrela. Estima-se que em nossa galáxia existam 10 milhões deles, porém apenas 25 são conhecidos, desses observados, a massa varia entre 5 e 30 vezes a massa solar.

Buracos negros super massivos: Essa classe de buracos negros é encontrada principalmente no centro das galáxias e diferentemente dos buracos negros estelares eles se formam a partir de imensas nuvens de gás ou de milhões de estrelas que colapsam sobre sua própria gravidade. Esses objetos possuem uma massa milhões ou até bilhões de vezes a massa solar e essa massa é proporcional a massa da galáxia.

A detecção mais comum de um buraco negro é feita quando esse objeto está em um sistema binário e está capturando matéria da estrela vizinha. Essa matéria forma um disco em espiral para dentro do buraco negro esquentando-o como mostra a figura 2.

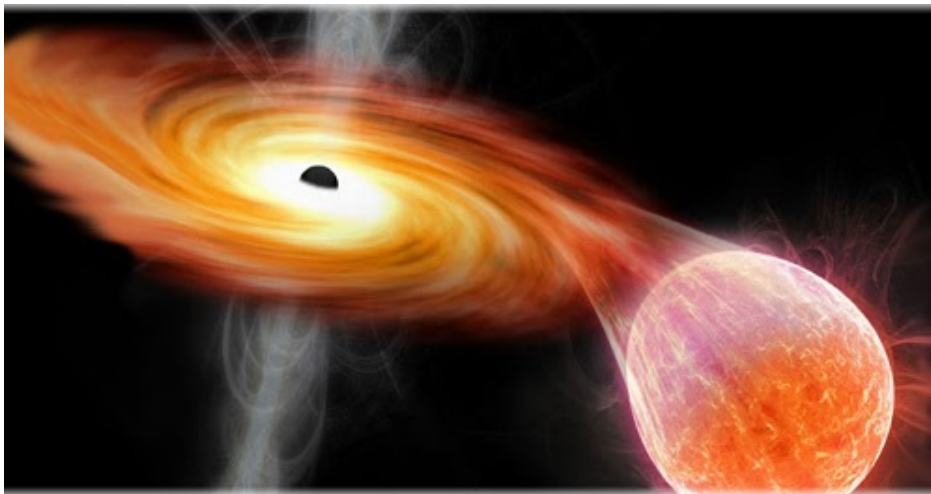


Figura 2 – Imagem ilustrativa de um buraco negro capturando matéria de uma estrela vizinha. Fonte: google imagens, 2020.

Para entender esse fenômeno basta lembrar da lei da conservação de energia onde nesse caso a energia do potencial gravitacional da matéria com relação ao buraco negro se transforma em energia cinética onde essa energia, no disco, é menor para orbitas externas e maior para órbitas internas. Assim as órbitas têm velocidades diferentes, causando atrito, aquecendo o disco e assim transforma a energia cinética em energia térmica. Como essas temperaturas são extremamente altas, isso ocasiona a emissão de raios x que escapam do centro antes do gás entrar no buraco negro, logo a detecção é feita através da emissão desses raios x.

Nos últimos cinco anos duas das maiores conquistas para a comunidade científica envolveram Buracos Negros, uma delas aconteceu em 2015 com a detecção das ondas gravitacionais produzidas por um sistema binário de buracos negros a qual rendeu um Prêmio Nobel para Barry C. Barish e Kip S. Thorne e a outra veio da publicação da primeira imagem real de um buraco negro em março de 2019 através do Telescópio Event

Horizon [14].

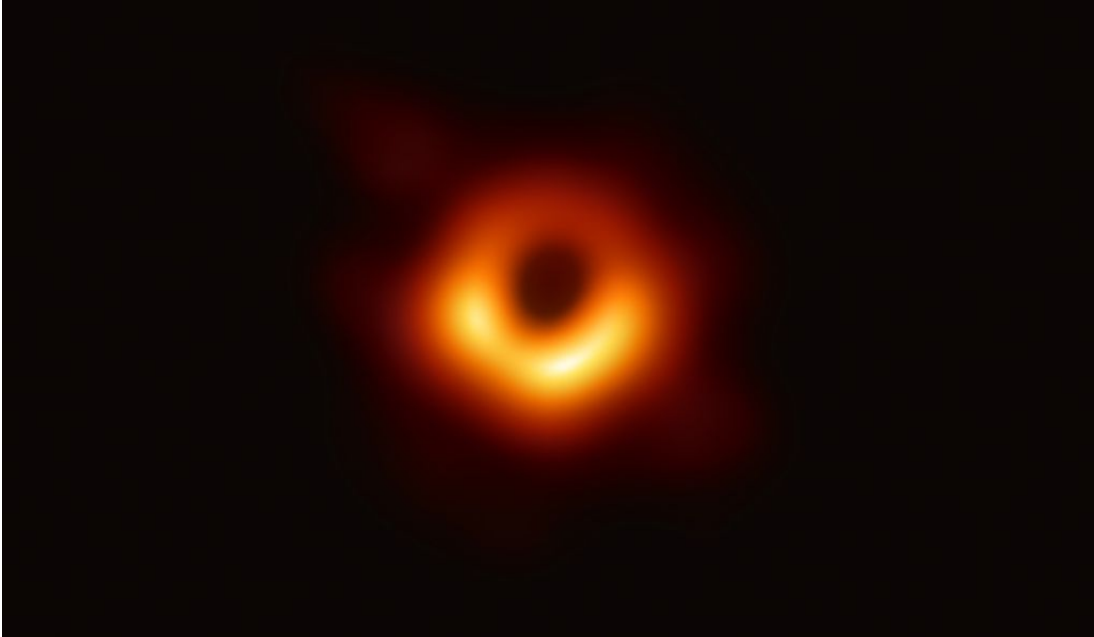


Figura 3 – Buraco negro que fica no centro da galáxia M87. Fonte: EHT 2020.

A imagem mostra um anel brilhante formado à medida em que a luz se dobra na gravidade intensa ao redor do buraco negro.

2.2 Relatividade Geral

A teoria da relatividade restrita surge no século XX com noções de que o espaço e o tempo seriam uma única entidade denominada de espaço-tempo. Essa teoria defendia que as leis da física seriam invariantes em qualquer referencial inercial e que a velocidade da luz seria um limite natural que não dependia do referencial. Essa teoria divergia das leis de Newton, uma vez que segundo as mesmas, a interação gravitacional agiria de forma instantânea. Assim a base para a formulação da Relatividade geral foi a união do conceito de gravitação com a relatividade restrita. A teoria da relatividade restrita formulada por **Albert Einstein** [15] trata da comparação de medidas feitas em diferentes referenciais inerciais que se movem com velocidade constante relativamente um ao outro enquanto a teoria relativística da gravitação além de tratar de referenciais inerciais, trata também de quaisquer que sejam os referenciais, uma vez que o campo gravitacional equivale localmente a um referencial não-inercial.

Em 1915 Einstein formulou uma série de equações que consolidaram a relatividade geral. A teoria da relatividade geral dá à gravidade uma nova interpretação: Diferentemente da teoria Newtoniana, onde a gravidade é vista como uma força entre dois corpos, no caso da relatividade geral, ela tem relação com a curvatura do espaço-tempo. No ano de 1916

surge a primeira solução para as equações de Einstein, a famosa solução de Schwarzschild que seria o ponto de partida para a teoria dos **Buracos Negros**.

2.2.1 Campo Gravitacional

É conhecido na gravitação Newtoniana que próximo a superfície da terra, qualquer objeto, independentemente de sua massa, cai com uma mesma aceleração sob a ação da gravidade. Albert Einstein percebeu que esse simples fato possibilitava a interpretação da força gravitacional como sendo uma força inercial. A força centrífuga é um exemplo desse tipo de força (inercial) pois ela tenta nos jogar para fora de um referencial em movimento circular. Para quem está nesse referencial sendo jogado para fora, os efeitos dessa força são bem reais, porém, para um observador em terra firme, essa força deixa de existir. No caso da gravidade façamos o seguinte experimento mental: Imagine-se dentro de um elevador. Subitamente há um solavanco seguido de frio na barriga com uma sensação de ausência de peso. seus pés mal tocam o chão e algo que estava em sua mão flutua ao seu lado. Essa sensação além de intrigante é aparentemente inescapável. Acontece que o elevador está em queda livre e a sensação de flutuação nada mais é que a consequência de que tudo, inclusive vc está caindo com a mesma ação gravitacional, porém, ao chegar no térreo essa sensação sessa mas, alguns questionamentos vêm em mente: O elevador estaria mesmo em queda livre? Como diferenciar uma queda livre da possibilidade desse elevador estar na verdade vagando no espaço sideral longe de qualquer corpo capaz de provocar gravidade? Esse é o que conhecemos como **Princípio da equivalência de Einstein**: É impossível diferenciar através de experimentos locais e em um curto intervalo de tempo, a situação de queda livre em um campo gravitacional da de se estar livre de qualquer força. Essa ideia fornece uma conexão entre situações onde não há gravidade e situações com gravidade.

No ano de 1907 o matemático alemão **Hermann Minkowski** percebeu que os efeitos da relatividade poderiam ser melhor compreendidos se espaço e tempo fossem vistos como parte de um ente mais fundamental, um espaço físico de quatro dimensões nascendo assim o conceito de **espaço-tempo**. Diante dessa ideia em meados de 1912, Einstein vislumbrou a possibilidade de descrever a gravidade através do espaço-tempo que tivesse sua geometria distorcida. Estabelecia-se então o âmago da teoria da gravidade.

Em 25 de novembro de 1915 Albert Einstein formula as equações da gravidade. Com essa nova teoria um determinado objeto que cai por exemplo em direção ao chão, está apenas descrevendo uma trajetória "mais retilínea possível"(geodésica) na geometria do espaço tempo distorcida pela massa da terra, assim como por exemplo o sol não exerce uma força sobre a terra e os outros astros em sua volta. Esses astros livres de qualquer força, percorrem trajetórias geodésicas nessa geometria distorcida descrevendo então as órbitas como mostra a figura 4. Em consonância com o princípio da equivalência de Einstein, que é incorporado da melhor forma possível pela relatividade geral, os referenciais em queda

livre são os verdadeiros referenciais inerciais.[16]

Ao entender as propriedades descritas podemos fazer a seguinte análise: Em um sistema de referencial em coordenadas cartesianas o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.1)$$

onde c é a velocidade da luz. Sob a transformação de Lorentz o intervalo mantém a mesma forma, porém para um referencial não-inercial o elemento de linha assume uma forma mais geral:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

onde $g_{\mu\nu}$ são funções das coordenadas espaciais x, y, z e temporal t . [17] também determina todas as propriedades geométricas de cada ponto do sistema curvilíneo espaço-tempo o qual denominamos de **métrica do espaço-tempo**.

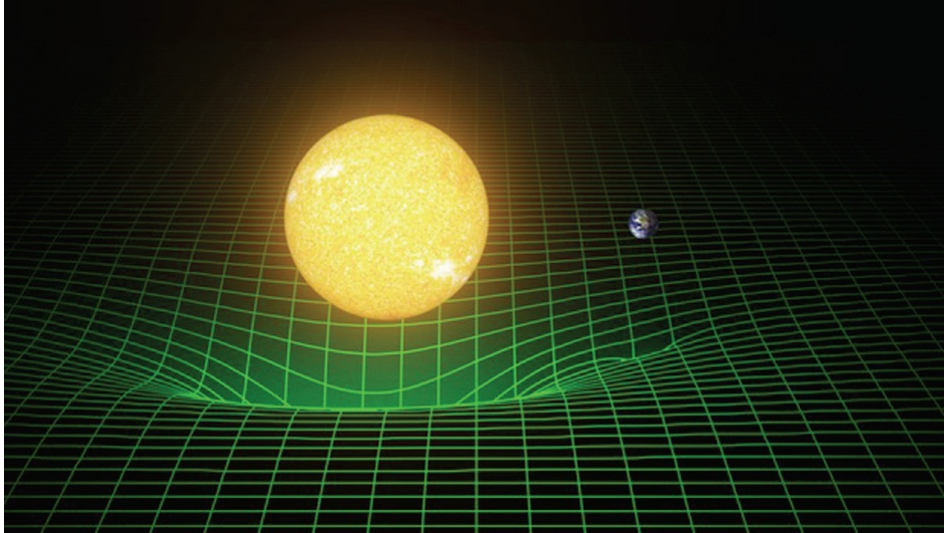


Figura 4 – Curvatura do espaço-tempo. Fonte: T.Pyle/Caltech/MIT/LIGO Lab.

Um sistema referencial não-inercial é equivalente a um certo campo de força. Na mecânica relativística esses campos são determinados por $g_{\mu\nu}$. Em campos gravitacionais "reais" o mesmo se aplica pois, qualquer um destes obedecerá apenas a uma alteração na métrica do espaço-tempo conforme sua métrica determina. Isso significa que as propriedades geométricas do espaço-tempo são determinados por fenômenos físicos.

2.2.2 As equações de Einstein

Sabemos segundo Newton que a interação entre dois corpos de diferentes massas que estão separados por uma determinada distância é dada devido a presença de um campo gravitacional real $\phi(x, y, z)$ que é gerado devido a uma distribuição de massa com densidade $\rho(x, y, z)$, obedecendo a equação de Poisson que é dada por:

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 4\pi\rho(x, y, z). \quad (2.3)$$

Se a descrição do campo Newtoniano só precisa de um único potencial para descrever as implicações do campo gravitacional, a teoria da relatividade geral (TRG) necessita de dez potenciais que são descritos pelas componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$, ou seja, no limite do campo fraco as dez equações devem ter relação com a equação de Poisson. Além dessas implicações, essas equações devem ter características semelhantes à equação 2.3, ou seja, o lado direito de cada equação deve apresentar o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, enquanto o lado esquerdo deve apresentar um tensor de segunda ordem determinado em termos de derivadas segundas do tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

O tensor que representa tais características é o tensor de Ricci que é dado pela seguinte expressão:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}, \quad (2.4)$$

onde $R_{\lambda\mu\sigma\nu}$ é o tensor de Riemann que é dado por

$$R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

e

$$\Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_{\lambda}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\lambda} - \partial_{\sigma}g_{\nu\lambda}), \quad (2.6)$$

representa os símbolos de Christoffel que também é conhecido como **conexão**, pois relaciona pontos diferentes de uma trajetória no espaço-tempo curvo. Note que segundo 2.5 e 2.6 a curvatura do espaço tempo está atrelada ao comportamento do tensor métrico.

Vale ressaltar que a divergência covariante do tensor energia momento é nula, ou seja, $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$. Assim o tensor que aparece no lado esquerdo das equações da relatividade geral deve estar expresso em termos do tensor de Ricci, satisfazendo assim essa propriedade. Logo o tensor que atende tais exigências é

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.7)$$

que é o tensor de Einstein.

Em conclusão Einstein mostra que as equações que descrevem o campo gravitacional gerado por uma grande quantidade de massa ou energia devem ter a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T^{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Portanto a expressão 2.8 representa as equações de Einstein, dada pelo tensor de Einstein no lado esquerdo representando a geometria do espaço-tempo e pelo tensor momento-energia no lado direito representando uma distribuição de energia e de massa no sistema. Analisando a expressão notamos que a deformação da geometria de rede do espaço-tempo se curva quando temos corpos massivos em uma determinada região do espaço.

2.2.3 Equação da Geodésica

Ao longo de uma curva $C(X^\mu)$, a derivada do tensor é dada por

$$\frac{DA^\mu}{Ds} \equiv \frac{dA^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu \frac{dx^\gamma}{ds} A^\nu, \quad (2.9)$$

onde s é um parâmetro afim que devido a relação entre o espaço-temporal e o tempo próprio pode ser substituído por τ . Ao identificar a quadri-velocidade u^λ , a expressão 2.9 se torna

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu \frac{dx^\gamma}{d\tau} A^\nu, \quad (2.10)$$

Podemos aplicar a regra da cadeia no primeiro termo do membro direito de 2.10 e identificar o resultado como sendo uma derivada covariante. Assim,

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial \tau} \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\gamma A^\nu = u^\lambda A^\mu_{;\lambda}. \quad (2.11)$$

Sabemos que o transporte paralelo de um vetor é dado por:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = 0, \quad (2.12)$$

ao escolhermos o próprio quadri-vetor velocidade temos que

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\gamma u^\nu = 0. \quad (2.13)$$

Portanto, usando a definição de quadri-velocidade obtemos

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (2.14)$$

que é a equação da geodésica sobre o tempo próprio.

2.3 Buracos Negros de Schwarzschild

Nesse modelo não consideramos a rotação, o que caracteriza o Buraco negro de Schwarzschild é a massa, a singularidade e o horizonte de eventos. Sua nomenclatura se dá em homenagem ao astrofísico que desenvolveu sua teoria, o alemão **Karl Schwarzschild** que obteve a primeira solução das equações de Einstein no ano de 1916, logo após a publicação seminal que marca o surgimento da relatividade geral [14]. Nesta seção daremos ênfase à solução de Schwarzschild, que descreve o campo gravitacional de uma partícula pontual massiva e fornece informações sobre duas singularidades: uma na origem do sistema de coordenadas onde se concentra a massa e uma radial a qual damos o nome de Raio de Schwarzschild.

A Solução de Schwarzschild

Para resolver as equações de Einstein no vácuo devemos denotar a geometria do espaço-tempo em torno de um buraco negro esfericamente simétrico. Para impor essa simetria consideremos a métrica do espaço de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.15)$$

A métrica sobre a esfera $d\Omega^2$ deve ser invariante mediante as transformações, para que a simetria esférica seja preservada. Logo, multiplicando todos os termos da métrica por coeficientes que são funções de r temos,

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\lambda(r)} r^2 d\Omega^2. \quad (2.16)$$

As funções exponenciais multiplicando os coeficientes na equação mantem a assinatura da métrica inalterada.

Fazendo uma mudança de coordenada em $\bar{r} = e^{\lambda(r)} r$ temos que a métrica dada pela equação 2.16 se torna

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} + e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2. \quad (2.17)$$

Fazendo $\bar{r} \rightarrow r$ e $\left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \rightarrow e^{2\beta}$, podemos rescrever a equação 2.17 da seguinte forma:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.18)$$

onde $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ são obtidas através da resolução das equações de Einstein. Neste caso temos que o escalar de curvatura é dado por

$$R = -2e^{-2\beta} [\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta})], \quad (2.19)$$

como independentemente do escalar de curvatura R_{tt} e R_{rr} são nulos, temos que

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta), \quad (2.20)$$

assim $\alpha = -\beta + C$, onde C é constante. Tomando $C = 0$ temos que $\alpha = -\beta$.

Tomando agora $R_{\theta\theta} = 0$ temos que

$$e^{2(\alpha)} (2r \partial_r \alpha + 1), \quad (2.21)$$

assim

$$e^{2(\alpha)} = 1 - \frac{R_s}{r}, \quad (2.22)$$

onde R_s é constante. Tomando a relação $\alpha = -\beta$, logo a métrica expressa na equação 2.18 torna-se

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.23)$$

Lembrando que no limite de campo fraco a componente g_{tt} é

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \quad (2.24)$$

e que a métrica de Schwarzschild se reduz a este caso quando $r \gg 2GM$, notamos que

$$R_s = 2M. \quad (2.25)$$

Portanto a métrica de Schwarzschild em coordenadas esféricas é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.26)$$

onde M é a massa da origem do campo e $d\Omega^2$ é a métrica sobre a esfera S^2 [18, 19, 20, 21].

Schwarzschild mostrou nessa solução que uma distribuição de massa puntiforme tem uma característica muito peculiar: para $R_s = 2M$ nada escapa dessa região, nem mesmo a luz. Esta região recebe o nome de **Raio de Schwarzschild**.

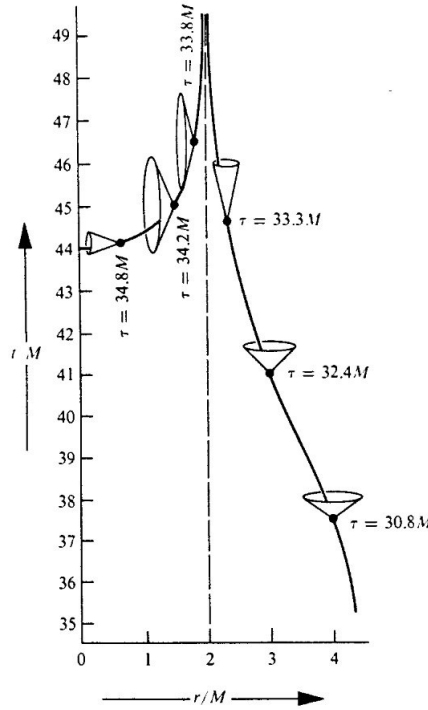


Figura 5 – Trajetória tipo-tempo nas coordenadas de Schwarzschild. Fonte: D’inverno, 2014

O que acontece é que quando uma partícula sem massa (fóton) atravessa essa região a deformação do espaço-tempo é tão grande que ela não consegue mais voltar, como mostra a figura 5. Logo, um observador que está muito distante desse raio não terá mais nenhuma informação sobre essa partícula, ou seja, agora ela é parte do Buraco Negro.

Este corpo está agora envolto por um contorno do espaço-tempo que nos impede de ter qualquer informação sobre o que ocorre em seu interior. A este contorno que no caso de Schwarzschild está situado em $R_s = 2M$ damos o nome de **Horizonte de eventos**.

Outra previsão fornecida pela solução de Schwarzschild trata do desvio para o vermelho devido ao campo gravitacional, ou seja, quanto mais próximo de um buraco negro um determinado objeto estiver, a radiação emitida por ele estará mais próxima do vermelho no espectro eletromagnético. A figura 6 explicita esse espectro.

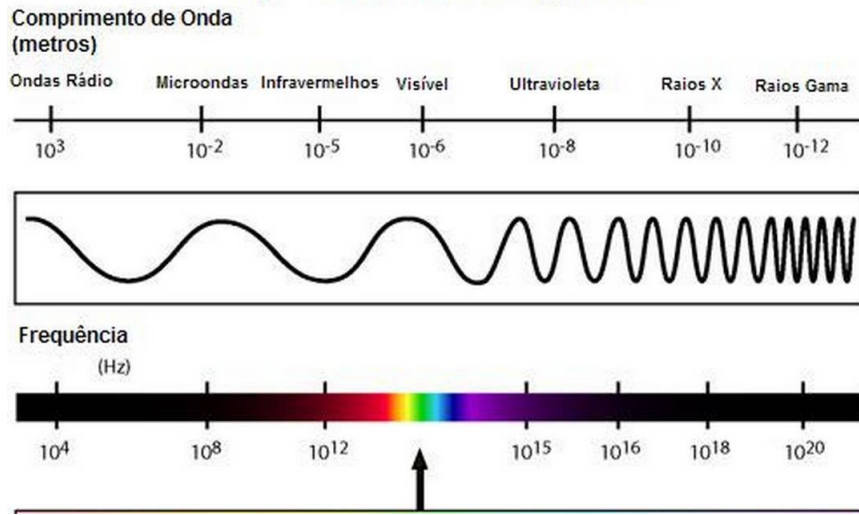


Figura 6 – Espectro eletromagnético. Fonte: google imagens, 2020.

Note que quanto maior o comprimento de onda, menor será a frequência.

2.4 Buracos Negros de Reissner-Nordström

Esta métrica é mais uma solução das equações de Einstein-Maxwell que representa o espaço-tempo exterior de um objeto esfericamente simétrico e carregado eletricamente e magneticamente. As propriedades do espaço-tempo sofrem uma grande influência devido a presença de carga. Para esse tipo de buraco negro podemos citar duas características importantes:

- Existe um horizonte de eventos que é o horizonte externo onde o mesmo se torna igual ao horizonte de Schwarzschild quando a carga é nula e existe o horizonte interno que quando a carga é nula, no limite o mesmo desaparece.
- Podemos encontrar três tipos de soluções onde o primeiro trata de uma fonte sobrecarregada (quando a carga é maior que a massa), nesta região não existe horizonte de eventos, ou seja, a singularidade é dita nua. Quando a massa é equilibrada por sua carga temos um segundo tipo de solução. Neste caso há uma sobreposição nos horizontes interno e externo. Temos como terceiro tipo a solução do buraco negro, quando a massa da fonte é maior que sua carga. Astrofísicamente, este último tipo de solução é o mais relevante.

A solução de Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström como foi dito, é bem similar a solução de Schwarzschild, a diferença é que nesta solução temos um corpo carregado [22]. Assim, neste caso, o membro direito das equações de Einstein não é nulo, ou seja,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento de Maxwell[19] que é expresso da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-g^{\lambda\rho} F_{\mu\rho} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \right). \quad (2.28)$$

Logo,

$$G_{\mu\nu} = -2g^{\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho}. \quad (2.29)$$

Temos portanto as equações de campo da RG na presença de fontes eletromagnéticas. Esta expressão nos fornece a geometria gerada por um objeto de massa M carregado.

Segundo [19], o tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ deve obedecer as seguintes relações de vínculo:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.30)$$

tal que

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \quad (2.31)$$

Temos portanto, os vínculos para as equações de Maxwell livre de fontes. O elemento de linha para uma simetria esférica é denotado da seguinte forma:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.32)$$

Outra condição é o Teorema de Portkoff onde $\nu = \nu(r)$ tal que $\lambda = \lambda(r)$, ou seja, a solução deve ser estática.

Considerando um caso estático sem campo magnético, o tensor de Maxwell deve ser da seguinte forma:

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

fazendo uso das expressões 2.30, 2.31 e 2.33, vemos que

$$E = \frac{e^{\frac{1}{2}\nu+\lambda}\epsilon}{r^2}, \quad (2.34)$$

onde ϵ é uma constante.

A expressão 2.34 representa a configuração do campo eletromagnético em um espaço-tempo simetricamente esférico. Para determinar a métrica 2.18 assumimos que

queremos uma solução assintoticamente plana, ou seja, com a métrica tendendo à 2.1. Portanto, para o campo elétrico temos:

$$E = \frac{\epsilon}{r^2}. \quad (2.35)$$

Ao calcular a componente G_{22} , comparando com o lado do tensor $T_{\mu\nu}$ da equação 2.29 e resolvendo o sistema de equações, determinamos o valor para a exponencial como sendo

$$e^\nu = c'' - \frac{c'}{r} + \frac{\epsilon^2}{r^2}. \quad (2.36)$$

No limite de campo fraco temos que $c'' = 1$ e $c' = 2m$. Portanto o elemento de linha toma a seguinte forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\epsilon^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\epsilon^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega. \quad (2.37)$$

Note que tomando o limite de $\epsilon \rightarrow 0$, voltamos para o caso da métrica de Schwarzschild.

2.5 Buracos Negros de Kerr

Quando estrelas em rotação ao redor de seu próprio eixo entram em colapso elas podem gerar o que conhecemos por buracos negros em rotação. Estes objetos foram descritos no ano de 1963 pelo matemático neozelandês **Roy Kerr** [23].

A teoria da relatividade geral nos diz que corpos que giram tendem a arrastar o espaço-tempo no sentido de sua rotação. Com isso, as partículas que estão na órbita de um buraco negro em rotação trilham trajetórias bem diferentes das que trilhariam se o objeto fosse estático. Distante de um buraco negro em rotação esse efeito é bem pequeno, porém, existe uma região que se situa bem próxima ao horizonte de eventos a qual chamamos de **ergosfera** que dentro dela tudo é obrigado a girar no sentido da rotação do buraco negro. Devido a existência dessa região o meio exterior rouba energia de rotação do buraco negro que conseqüentemente tende a parar, como foi mostrado na década de 60 por Penrose e posteriormente pelo físico americano Charles Misner [23].

Nesta seção vamos considerar o caso de uma variedade 4-dimensional sob essa perspectiva de um objeto em rotação, analisando e identificando assim, algumas grandezas físicas, como por exemplo o momento angular.

A solução de Kerr

Como a solução de Kerr é bastante complicada de se obter e por ela não ser o foco principal deste trabalho, vamos apenas fazer uma análise do elemento de linha que para uma distribuição de massa neutra e com momento angular é da seguinte forma:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} - [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (2.38)$$

onde

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2, \quad (2.39)$$

e

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2.40)$$

Analisando a expressão 2.38 vemos que a solução de Kerr não é esfericamente simétrica. Mas isso já era esperado, uma vez que objetos que giram tendem a não apresentar simetria. Se tomarmos $a = 0$ voltamos para o elemento de linha de Schwarzschild uma vez que a quantidade a está diretamente relacionada com o momento angular, ou seja, $a = J/M$ onde J é o momento angular e M é a massa. Ao inverter simultaneamente t e φ , ou seja, se $t = -t$ e $\varphi = -\varphi$ a métrica se mantém invariante, o que sugere que o campo seja produzido por uma distribuição de massa em rotação. Quando $r \rightarrow \infty$ a solução de Kerr, assim como as demais métricas, tende ao espaço de Minkowski. Ao calcular o escalar de Kretschmann, Richard Conn Henry [24] mostra que apenas o caso em que $\rho = 0$ fornece singularidades físicas, logo

$$\rho^2 = 0, \quad (2.41)$$

e conseqüentemente,

$$\cos \theta = 0. \quad (2.42)$$

Como r não é a coordenada radial habitual vamos analisar se a solução de Kerr é assintótica. Para isso consideremos que

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (2.43)$$

fazendo as seguintes substituições,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi + a \sin \theta \sin \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi - a \sin \theta \cos \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

De 2.41, 2.42 e 2.43 tiramos que $x^2 + y^2 = a^2$ e $z = 0$. Isto nos diz que o buraco negro de Kerr tem o formato de um anel de raio a , centrado na origem e situado no plano xy .

Na métrica de Schwarzschild e de Reissner-Nordström, os elementos g_{00} e g^{11} são iguais enquanto na métrica de Kerr esses elementos são diferentes. Isso leva a formação de duas regiões e não apenas a formação do horizonte de eventos.

Ao estudar sistemas em rotação nos deparamos com um efeito denominado de **Lense-Thirring**, onde o sistema de coordenadas é puxado pela rotação da distribuição de massa. A solução de Kerr proporciona esse efeito e de uma forma tão forte que a partir de uma determinada região do espaço-tempo, é impossível não ficar em movimento com relação a um referencial no infinito. Logo, um objeto próximo ao buraco negro de Kerr,

que entrar nessa região se moverá seguindo a rotação do buraco negro. A esta região damos o nome de Região de limite estacionário que é delimitada pela seguinte superfície:

$$g_{00} = r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (2.44)$$

e assim temos

$$r_{s\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.45)$$

da mesma forma que nos casos de Schwarzschild e Reissner-Nordström teremos dois horizontes de eventos:

$$g^{11} = r^2 - 2mr + a^2 = 0, \quad (2.46)$$

logo,

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}. \quad (2.47)$$

Em ambos os casos devemos considerar que $a^2 < m^2$. Analisando as expressões 2.45 e 2.47, note que a primeira superfície de limite estacionário fica à frente do primeiro horizonte de eventos. Ou seja, se um objeto cai no buraco negro, primeiramente ele cruzará a superfície de limite estacionário para depois alcançar o horizonte de eventos. A região que se situa entre a superfície de limite estacionário e o horizonte de eventos é chamada de Ergosfera.

2.6 Buracos Negros BTZ

As fascinantes propriedades dos buracos negros, tanto clássicos quanto quânticos, fizeram os físicos da época buscarem por um análogo de dimensão menor que 4 com as características principais sem muita complicação [7]. No ano de 1992 os físicos Chilenos Maximo Bañados, Claudio Teitelboim e Jorge Zanelli determinaram uma solução para as equações de Einstein no vácuo em $(1 + 2)$ Dimensões com uma constante cosmológica negativa $\Lambda = -1/l^2$. O buraco negro BTZ é obtido através de identificações periódicas no espaço anti-de Sitter (AdS). Esse objeto termodinâmico é um exemplo simples da classe dos orbifolds Lorentzianas que são construídos a partir do espaço AdS [25]. A constante implica que localmente o espaço é do tipo AdS, porém em suas propriedades globais ela se difere. É necessário que essa constante negativa exista para que os buracos negros se formem, pois em uma teoria onde a massa é adimensional ela nos dá a escala de comprimento necessária para que se tenha um horizonte de eventos[7].

Bañados, Teitelboim e Zanelli consideraram que

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g} [R + 2l^{-2}] dx^2 dt + B, \quad (2.48)$$

onde B é o termo de superfície. O raio de curvatura l se relaciona com a constante cosmológica da seguinte maneira:

$$l^2 = -\frac{1}{\Lambda}. \quad (2.49)$$

De fato, l deve fornecer a escala de comprimento necessária para a obtenção de um raio de horizonte de eventos.

A métrica obtida como resultado das equações de Einstein foi

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2(N^\phi dt + d\phi), \quad (2.50)$$

onde N e N^ϕ são funções de r dadas por

$$N^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad (2.51)$$

e

$$N^\phi = -\frac{J^2}{2r^2}, \quad (2.52)$$

com t e r finitos e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Note que na métrica acima apresentada, M e J nos fornece a massa e o momento angular respectivamente, elas representam cargas associadas com a invariância assintótica sob o deslocamento no tempo e invariância de rotação. Esta identificação é obtida por meio de uma análise de integrais de superfície adicionadas ao Hamiltoniano com objetivo de deixá-lo bem definido [7]. Note também que a função de $N(r)$ desaparece para dois valores de r que são:

$$r_\pm^2 = \frac{l^2 M}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right]. \quad (2.53)$$

Destes, r_+ é o horizonte do Buraco Negro. Para que o horizonte exista é necessário que $M > 0$ e $|J| \leq Ml$. Quando $|J| = Ml$ as duas raízes de N^2 são idênticas.

Fazendo uso da métrica 2.50 podemos extrair uma equação para o estado de vácuo. Para isto façamos com que o buraco negro desapareça deixando o raio do horizonte ir para zero, ou seja, devemos permitir que $M \rightarrow 0$ e $J \rightarrow 0$, assim

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l}\right) dt^2 + \left(\frac{l}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (2.54)$$

para retomar o espaço AdS façamos $M = -1$ e $J = 0$. Com isso a singularidade desaparece e seu horizonte deixa de existir. Neste caso temos que

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.55)$$

Portanto, o espaço AdS surge como um estado vinculado separado do espectro contínuo de Buraco negro por uma diferença de uma unidade de massa. Note que esse estado não pode ser deformado no vácuo, pois para a sua deformação seria preciso passar por uma sequência de singularidades que não se incluem nessa configuração [26][27].

2.7 Termodinâmica dos Buracos Negros

Uma das grandes contribuições para a física é o estudo dos Buracos Negros e sua ligação com a termodinâmica. É fato que em geral a termodinâmica clássica e a RG têm estudos distintos e suas teorias têm áreas de aplicação relativamente distantes, porém, o estudo do universo e dos seus astros trata não só da compreensão de sua dinâmica, mas também de sua evolução térmica. Apesar disso, a relação entre quantidades termodinâmicas e quantidades dinâmicas do campo gravitacional sempre foi vista com uma certa descrença. Mas no ano de 1973 Jacob Bekenstein propôs uma relação de proporcionalidade entre a entropia do buraco negro e sua área enquanto Stephen Hawking junto com Carter e Bardeen desenvolvia as leis da mecânica desses sistemas, que são análogas as leis da termodinâmica clássica[28]. Apesar dessas analogias, um tratamento puramente clássico não seria suficiente para explicar como um objeto que não permite que nenhuma matéria escape dele pudesse ter uma temperatura associada a si.

Em 1974 fazendo uso de conceitos de teoria quântica de campos, Hawking resolveu esse problema. Ele mostrou que no vácuo, um campo pode gerar pares de partícula-antipartícula com espectro de radiação que seria responsável por gerar uma temperatura associada a esse campo. Com esse conceito aplicado ao problema dos Buracos Negros ele mostrou que pares desse tipo poderiam surgir nas imediações dos horizontes de eventos.

O estudo da termodinâmica de Buracos Negros nos ajuda a perceber como a entropia do universo aumenta de forma espontânea. Considerando a primeira lei da termodinâmica como sendo:

$$dE = TdS - pdV. \quad (2.56)$$

Notamos que uma pequena mudança na entropia de um sistema é acompanhada por uma variação proporcional na energia desse sistema. A temperatura do sistema é o que chamamos de fator de proporcionalidade, ou seja, T é a temperatura, S é a entropia, p é a pressão e V representa o volume do sistema. Com relação aos BNs podemos pensar da mesma forma: uma pequena variação na massa do buraco negro altera a área do horizonte de eventos. Por esta pequena alteração na massa é multiplicada um fator de proporcionalidade denominado por Hawking em 1976 de gravidade de superfície (k), que nada mais é que uma medida da força de gravidade no horizonte de eventos.

Fazendo essas correspondências de propriedades termodinâmicas vemos que

$$E \leftrightarrow M, \quad (2.57)$$

$$S \leftrightarrow A, \quad (2.58)$$

e

$$T \leftrightarrow \frac{k}{2\pi} \quad (2.59)$$

Essencialmente, cada lei da termodinâmica está correspondendo a uma lei da mecânica dos buracos negros. No contexto da relatividade geral essa analogia é perfeita.

A **lei zero** diz que embora k seja definido localmente sobre o horizonte de eventos, sobre o horizonte de um buraco negro estacionário o mesmo é sempre constante. Essa invariância de k vem da lei zero da termodinâmica que diz que em um sistema térmico em equilíbrio a temperatura é uniforme em todos os pontos. O fato de k ser constante está associado a propriedades especiais do horizonte de um buraco negro estacionário. fazendo uso das equações de Einstein e assumindo a analiticidade do espaço-tempo, Stephen Hawking provou que o horizonte de eventos é um horizonte de Killing e que o espaço-tempo deve ser estático e assimétrico.

A **primeira lei** está relacionada com a conservação de energia expressa na equação 2.56 que segundo Unruh e Schützhold (2007) se corresponde com o buraco negro da seguinte forma:

$$dM = \frac{k dA}{8\pi} \Omega_H dJ, \quad (2.60)$$

onde M é a massa, A representa a área, k a gravidade da superfície, Ω_h representa a velocidade angular e J é o momento angular do buraco negro. A energia e a massa estão relacionadas como sendo $E = mc^2$.

A **segunda lei** da termodinâmica diz que a entropia nunca diminui. No caso da mecânica do buraco negro a área do horizonte de eventos nunca diminui, ou seja

$$\delta A \geq 0. \quad (2.61)$$

Eis então o teorema da área que diz que no colapso de dois buracos negros, após esse evento a área do horizonte de eventos é maior do que a soma das áreas dos horizontes iniciais, ou seja

$$A_3 > A_1 + A_2. \quad (2.62)$$

A segunda lei da mecânica dos buracos negros é mais forte que sua correspondente na termodinâmica, no sentido de que na termodinâmica a entropia pode ser transferida de um sistema para outro exigindo apenas que a energia total não diminua enquanto no buraco negro a área não pode ser transferida de um buraco negro para outro. Logo, a exigência da segunda lei da mecânica de buracos negros é que a área de um buraco negro não decresça.

A **terceira lei** da termodinâmica diz que é impossível através de qualquer procedimento, não importa o quão idealizado, reduzir a temperatura de qualquer sistema à temperatura zero em um finito número de finitas operações. No caso dos buracos negros, é impossível anular k considerando uma sequência finita de operações. Em relação as demais leis da mecânica dos buracos negros esta difere pelo fato de não existir uma demonstração rigorosamente matemática para a mesma. Porém há muitas razões para crer que ela é

válida, como por exemplo no Buraco Negro de Kerr: se adicionando partículas tentássemos reduzir o valor de k aumentando o momento angular, notaríamos que a diminuição da superfície de gravidade seria cada vez menor onde a massa e o momento angular tenderia a um raio crítico $J/M^2 = 1$, assim teríamos $k = 0$. Processos de acreção onde $J/M^2 \rightarrow 1$ com adição de uma quantidade finita de massa de repouso são existentes. Porém tais processos exigem uma divisibilidade infinita da matéria e um tempo infinito.

Vale ressaltar que se pudéssemos levar k a zero por meio de uma sequencia finita de operações, poderíamos então levar ainda mais o processo, criando assim, uma singularidade nula. E se isso de fato acontecesse ocorreria uma quebra da suposição de previsibilidade assintótica que é base de muitos resultados da teoria de buracos negros.

Levando em consideração que o buraco negro emita radiação térmica com uma temperatura dada por

$$T_h = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dg_{00}}{dr} \right|_{r=r_h}, \quad (2.63)$$

onde $r = r_h$ é o raio do horizonte de eventos e a entropia é dada pela seguinte expressão,

$$S = \int \frac{dM}{T_H}. \quad (2.64)$$

Vamos a seguir falar um pouco da termodinâmica para os casos da métrica de Schwarzschild e da métrica BTZ respectivamente.

2.8 Termodinâmica na métrica de Schwarzschild

Para determinar a temperatura Hawking e a entropia fazendo uso da equação 2.63 obtemos:

$$T_H^{(S)} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \Big|_{r=2M}, \quad (2.65)$$

então

$$T_H^{(S)} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (2.66)$$

Fazendo uso das equações 2.64 e 2.65 podemos calcular a entropia da seguinte forma:

$$S^{(S)} = \int 8\pi M dM = 4\pi M^2 = \pi r_h^2, \quad (2.67)$$

onde r_h é o raio do horizonte de Schwarzschild. Em termos da área de uma esfera esse resultado so torna

$$S^{(S)} = \frac{A}{4}. \quad (2.68)$$

Assim se estabelece a fórmula de Bekeinstein-Hawking que noz diz que a entropia de um buraco negro é proporcional a sua área.

A lei de radiação de Stephan-Boltzmann para um corpo negro nos diz que

$$\frac{dE}{dt} \cong -\sigma AT^4, \quad (2.69)$$

onde $\sigma = \pi^2/60$ é a constante de Stephan-Boltzmann no sistema natural de unidades.

No caso de Schwarzschild, lembrando que estamos analisando no sistema de unidades naturais e como $E = M$, temos que

$$A = 16\pi M^2, \quad (2.70)$$

e

$$T_H^{(S)} = \frac{1}{8\pi M} \quad , \quad (2.71)$$

logo,

$$\frac{dM}{dt} \propto \frac{1}{M^2} \quad . \quad (2.72)$$

Como esperado, quanto maior a massa do buraco negro, maior será seu tempo de vida.

3 Não-Comutatividade

No ano de 1947 Snyder [29] publicou um artigo que tratava da idéia de não-comutatividade entre coordenadas. Essa idéia já teria sido tratada por Heisenberg que propôs a existência de uma relação de incerteza não nula entre as coordenadas espaciais, assim ele buscava solucionar as singularidades que apareciam na teoria quântica de campos [30]. Baseado no estudo de Heisenberg, Snyder [29] mostrou que existe uma escala de comprimento mínimo universal em distâncias próximas a $\sqrt{\theta}$ que em geral é limitado ao comprimento de Planck, e por isso não é acessível para observações experimentais. Porém essa idéia foi esquecida por anos devido ao grande sucesso do método de renormalização reaparecendo nos anos 80 ao ser estudada por Connes [30]. Outro fato que impulsionou o estudo da não-comutatividade foi o interesse em formular uma teoria quântica para a gravitação, pois em regiões da escala de Planck onde os efeitos quânticos dessa teoria são relevantes, a comutatividade perde todo o sentido[30].

3.1 Espaço-tempo não-comutativo e princípio da incerteza generalizado (GUP)

O espaço-tempo não comutativo surge através da mecânica quântica uma vez que no espaço de fases as variáveis canônicas x^μ e p_ν são substituídas pelos operadores $\hat{x}^\mu$ e $\hat{p}_\nu$ que estão de acordo com a relação de comutação de Heisenberg $[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu]$. Com isso o espaço de fases se torna espalhado e a noção de ponto dá lugar à célula de Planck e no limite clássico em que $\hbar \rightarrow 0$ temos o espaço comum [31]. Para construir a álgebra não-comutativa vamos considerar a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde $\theta^{\mu\nu}$ é um tensor anti-simétrico com dimensão de comprimento ao quadrado. No caso mais simples em que θ é constante. Como as coordenadas não comutam conseqüentemente elas não são diagonalizáveis simultaneamente. Logo, a relação de incerteza é proporcional a θ . Fazendo uso do princípio da incerteza de Heisenberg generalizado denotado por:

$$\Delta x^{\mu 2} \Delta x^{\nu 2} \geq \left(\frac{1}{2i} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \right)^2, \quad (3.2)$$

temos que

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}|. \quad (3.3)$$

Essa matriz fornece a discretização fundamental do espaço-tempo da mesma forma em que a constante de plank $\hbar$ discretiza o espaço de fase. A conseqüência disto é que a

noção de ponto não mais se justifica, uma vez que o comportamento não-comutativo induz uma incerteza. Ou seja, ao localizar uma das coordenadas, a outra se espalha, perdendo assim a representação usual de um ponto através da localização de coordenadas [32].

Portanto, podemos interpretar essa perda de resolução como o surgimento de um ultravioleta eficaz natural interrompido, regulando a teoria a gravidade e a teoria quântica de campos [32]. Segundo Szabo [33], a melhor evidencia que se tem da teoria não-comutativa vem da teoria das cordas, que é o candidato mais forte para a teoria quântica da gravidade. Como as cordas têm comprimentos infinitos definidos através da escala de Planck

$$l_p \approx \sqrt{\frac{G\hbar}{c^2}} \approx 10^{-35}m, \quad (3.4)$$

não é possível observar distâncias menores que l_p . Em altas energias as cordas alteram o princípio da incerteza de Heisenberg, nessa abordagem, passamos a trabalhar com o princípio da incerteza generalizado (GPU) que baseado em altas energias assume a seguinte forma:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\Delta p} + l_s^2 \Delta p \right). \quad (3.5)$$

Note que no limite de $l_s \rightarrow 0$, a relação 3.5 toma a forma da relação da mecânica quântica usual. Assim, a teoria das cordas fornece uma forma explicita da noção de achatamento do espaço-tempo [33]. Portanto, a relação de incerteza pode ser postulada da seguinte forma:

$$\Delta x \hat{\Delta} x^j = l_p^2, \quad (3.6)$$

onde l_p é o comprimento de Planck do espaço-tempo.

Um efeito físico da não-comutatividade das coordenadas bem conhecido na mecânica quântica é o problema de Landau [17], onde uma partícula carregada se movimenta num campo magnético forte constante e perpendicular ao plano tal que o espaço passa a ser não-comutativo quando projetado no nível mais baixo de Landau. Este exemplo se assemelha ao da teoria das cordas, pois ambos se caracterizam pela presença de um campo magnético de fundo [34].

3.2 Problema de Landau

Este problema trata de um sistema não-relativístico de N_e elétrons que interagem e se movem bidimensionalmente. Consideremos uma partícula carregada de massa m que se move no plano $r_a = 1, \dots, N_e$ na presença de um campo magnético $B = B_z$ constante e ortogonal ao plano desse movimento.

Podemos expressar a lagrangiana nesta situação da seguinte forma:

$$L = \sum_{a=1}^{N_e} \left[\frac{m_e}{2} \dot{\vec{r}}_a^2 + e \dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{A}(\vec{r}_a) - V(\vec{r}_a) \right] - \sum_{a<b} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b) \quad (3.7)$$

onde o primeiro termo é a energia cinética, o segundo termo é o potencial vetor, o terceiro termo é o potencial eletromagnético e o quarto termo representa o potencial de interação entre as partículas. podemos denotar esse potencial vetor como sendo $\vec{A}(\vec{r}_a) = (0, Bx_a, 0)$ devido a um calibre. O rotacional do potencial vetor $\vec{a}(\vec{r}_a)$ nos fornece o campo magnético, assim podemos supor um calibre como sendo

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \quad (3.8)$$

e

$$\vec{V}' = V - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (3.9)$$

onde f é uma função qualquer. Devemos determinar o correspondente operador hamiltoniano para que possamos quantizar canonicamente esse sistema. assim,

$$H = \sum_{a=1}^{N_e} \left[\frac{\pi_a^2}{2m_e} + V(\vec{r}_a) \right] - \sum_{a<b} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b) \quad (3.10)$$

onde o momento mecânico é dado por

$$\pi_a = m_e \dot{r}_a = \vec{P}_a - eA(\vec{r}_a), \quad (3.11)$$

com o momento canônico $\vec{P}_a$ obedecendo as seguintes relações de comutação usuais:

$$[x_a, P_b^x] = [Y_a, P_b^y] = i\delta^{ab} \quad (3.12)$$

$$[x_a, Y_b] = [P_a^x, P_b^y] = 0. \quad (3.13)$$

A relação entre os comutadores não nulos é dada por:

$$[\dot{\pi}_a^x, \dot{\pi}_b^y] = ieB\delta_{ab}. \quad (3.14)$$

Note que na presença de um campo magnético B o espaço dos momentos não é comutativo. Em termos dos operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico podemos reescrever o operador momento $\dot{\pi}_a$ e na ausência de interações, $V = U = 0$, os autovalores de energia da hamiltoniana são aqueles dos níveis de Landau

$$E = \frac{eB}{m_e} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Ao tomarmos o limite de campo forte $B \rightarrow \infty$ notamos que surge a não-comutatividade das coordenadas, ou de maneira mais formal, ao tomarmos o limite de massa infinitesimal $m_e \rightarrow 0$. Com isso a lagrangiana toma a seguinte forma:

$$L_0 = \sum_{a=1}^{N_e} [eBx_a \dot{y}_a - V(x_a, y_a)] - \sum_{a<b} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b). \quad (3.16)$$

Para cada $a = 1, \dots, N_e$ que a lagrangiana 3.16 é da forma $p\dot{q} - h(p, q)$, e forma um par canônico (eBx_a, y_a) cuja relação de comutação é da seguinte forma:

$$[\hat{x}_a^i, \hat{x}_b^j] = \frac{i\delta_{abe^{ij}}}{eB} = i\delta_{ab}\theta^{ij} \quad (3.17)$$

em que o parâmetro da não-comutatividade é dado por:

$$\theta^{ij} = \frac{\epsilon^{ij}}{eB}, \quad (3.18)$$

onde ϵ^{ij} é o tensor de Lavi-Civita. Note que devido a imposição de restrições de primeira classe $\pi_a \approx 0$ o espaço não-comutativo segue da não-comutatividade do momento. O movimento de elétrons no nível mais baixo de Landau é de fato descrito por um plano não-comutativo.

3.3 Produto Estrela

No início da mecânica quântica o produto estrela também conhecido como produto moyal era descrito como uma expansão em $\hbar$, porém na teoria de campos não-comutativa é descrito como uma expansão de θ e este produto, definido por (TEDESCO 2010)[35] é dado por:

$$f(x) \star g(x) = f(x) \exp \left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right] g(x), \quad (3.19)$$

onde a seta indica o sentido em que a derivada parcial está atuando. Ao expandir a exponencial da expressão 3.19 fazendo uso da formula de Euler

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \quad (3.20)$$

podemos denotar a definição do produto estrela da seguinte forma:

$$f(x) \star g(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x) + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (3.21)$$

Note que este produto acrescenta uma fase na multiplicação de dois operadores.

Algumas relações do produto estrela

(i) Relação de comutação entre duas coordenadas:

$$\begin{aligned} [x^\mu \star x^\nu] &= x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu \\ &= x^\mu x^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x^\nu - x^\nu x^\mu - \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\nu\partial_\beta x^\mu \\ &= i\theta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

(ii) Relação de comutação entre uma coordenada e uma função:

$$\begin{aligned} [x^\mu \star f(x)] &= x^\mu \star f(x) - f(x) \star x^\mu \\ &= x^\mu f(x) + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta f(x) - f(x)x^\mu - \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha f(x)\partial_\beta x^\mu \\ &= i\theta^{\mu\nu}\partial_\nu f(x). \end{aligned} \quad (3.23)$$

(iii) Relação de comutação entre duas funções:

$$\begin{aligned}
 [f(x) \star g(x)] &= f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) \\
 &= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) - g(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) f(x) \\
 &= 2if(x) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x).
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

(iv) Relação de anti-comutação entre duas funções:

$$\begin{aligned}
 \{f(x) \star g(x)\} &= f(x) \star g(x) + g(x) \star f(x) \\
 &= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) + g(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) f(x) \\
 &= 2f(x) \cos\left(\frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Vamos considerar a transformada de Fourier que nos permite passar do espaço de configurações para o espaço dos momentos.

$$f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu x^\mu} \tag{3.26}$$

onde $\tilde{f}(k)$ é dado por

$$\tilde{f}(k) = \int d^4 x f(x) e^{-ik_\mu x^\mu}. \tag{3.27}$$

e a formula de Baker-Campbell-Hausdorff [33],

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} \cdot e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{3.28}$$

De posse dessas relações podemos agora determinar outras propriedades do produto estrela:

(v) Representação de Fourier para o produto estrela:

$$\begin{aligned}
 f(x) \star g(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ik_\mu x^\mu} \star e^{ik'_\nu x^\nu} \\
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ix^\mu (k_\mu + k'_\mu)} e^{\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

(vi) Integração do produto estrela:

$$\begin{aligned}
 \int d^4 x f(x) \star g(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ix^\mu (k_\mu + k'_\mu)} e^{\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} \\
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ix^\mu (k_\mu + k'_\mu)}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Fazendo uso da representação de Fourier da delta de Dirac $\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-a)}$ e propriedade de filtragem $\int \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \int d^4 x f(x) \star g(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k') (2\pi)^4 \delta(k_\mu + k'_\mu) \\
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k').
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Portanto, ao substituírmos 3.27 em 3.31 determinamos a integral do produto estrela como sendo

$$\int d^4x f(x) \star g(x) = \int d^4x f(x)g(x). \quad (3.32)$$

Note que a integral do produto estrela de duas funções se iguala a integral do produto natural dessas duas funções.

(vii) Propriedade associativa

$$\{[f(x) \star g(x)] \star h(x)\} = \{f(x) \star [g(x) \star h(x)]\}. \quad (3.33)$$

(viii) Propriedade cíclica

$$\int d^4x f_1(x) \star f_2(x) \star \dots \star f_n(x) = \int d^4x f_2(x) \star f_2(x) \star \dots \star f_1(x). \quad (3.34)$$

(ix) Complexo conjugado:

$$[f(x) \star g(x)]^* = g(x)^* \star f(x)^*. \quad (3.35)$$

Se f e g forem funções reais, consequentemente, o seu produto estrela também será.

3.4 Métrica de Schwarzschild não-comutativa

Sabe-se através de [36], que os restos finais de um buraco negro no plano de fundo não-comutativo é um objeto termodinâmico estável. Este foi o ponto de partida nos estudos envolvendo Buracos Negros de Schwarzschild não-comutativo. No regime em que $M\sqrt{\theta} \gg 1$, a lei da entropia/área é recuperada (formula de Bekenstein-Hawking), ou seja, a entropia é múltipla da área.

A não-comutatividade descarta estruturas que se assemelham a pontos em favor de objetos manchados em espaço-tempo plano. Este efeito é matematicamente implementado por uma regra de substituição tal que substituímos a função delta de Dirac pela função gaussiana de largura $\sqrt{\theta}$ [36]. Assim a densidade de massa num campo gravitacional estático e esfericamente simétrico é dado por:

$$\rho_\theta(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} \exp(-r^2/4\theta), \quad (3.36)$$

onde a massa total M é distribuída através da região de tamanho linear $\sqrt{\theta}$. Isso acontece devido a incerteza generalizada do comutador de coordenadas 3.1.

Fazendo uso da expressão 3.36 podemos escrever a massa do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo de raio r da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m(r) &= \int_0^r 4\pi r^2 \rho_\theta(r) dr \\ &= \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \equiv \int_0^{r^2/4\theta} x^{1/2} e^{-x} dx \quad (3.38)$$

é a função gamma e θ é o parâmetro de não-comutatividade.

A métrica do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo é dada por:

$$ds^2 = -H(r)dt^2 + H(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \quad (3.39)$$

onde

$$H(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r} = 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right). \quad (3.40)$$

Ao fazer $H(r) = 0$ encontramos o raio do horizonte de eventos. Logo temos que

$$\hat{r}_h = \left[1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi\theta}}e^{-M^2/\theta} + \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\theta}}{M}\right)\right], \quad (3.41)$$

note que no caso não-comutativo, o horizonte de eventos é deslocado devido a um fator dependente do parâmetro θ . Quando $M/\sqrt{\theta} \rightarrow \infty$, 3.41 se reduz ao caso comutativo onde $\hat{r}_h = 2M$.

Outra análise importante diz respeito ao fato de que os efeitos da não-comutatividade só são relevantes para pontos próximos da origem $r \approx \sqrt{\theta}$, onde as pressões tangenciais e densidade de matéria são regularizadas por θ e têm valor finito $M/(4\pi\theta)^{3/2}$ na origem. Assintoticamente no infinito, ou seja, para distâncias muito grandes, a densidade e pressões se anulam, com isso a solução de vácuo é recuperada [36].

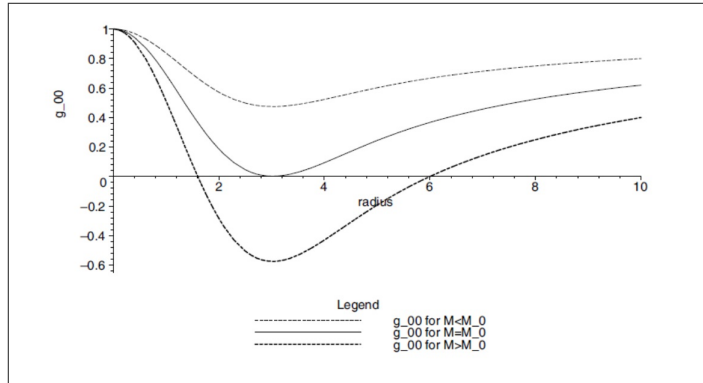


Figura 7 – A Solução de Schwazschild não-comutativa. Fonte: Nicolini, 2009

A figura 7 mostra o gráfico de $-g_{00} = g_{rr}^{-1}$ em função de $r/\sqrt{\theta}$ para vários valores de $M/\sqrt{\theta}$. A curva superior corresponde a $M = \sqrt{\theta}$ onde não há horizonte; a curva central corresponde a $M = M_0 \approx 1,90\sqrt{\theta}$ onde o horizonte é degenerado em $r_h = r_0 \approx 3,0\sqrt{\theta}$ e a curva inferior corresponde a $M = 3,02\sqrt{\theta}$ onde se observa dois horizontes: Em $r_h = r_- \approx 1,60\sqrt{\theta}$ e $r_h = r_+ \approx 6,0\sqrt{\theta}$.

4 Termodinâmica do Buraco Negro de Schwarzschild não-comutativo

Segundo [37], o princípio da incerteza generalizado (GPU) exerce grande influência no estudo da gravidade quântica que aparentemente, desempenha importantíssimo papel ao que diz respeito as possíveis modificações da termodinâmica dos buracos negros. Neste capítulo faremos um estudo na termodinâmica do buraco negro não-comutativo de Schwarzschild com correções devido ao princípio da incerteza generalizado com uma aproximação WKB via o método de Hamilton-Jacobi.

4.1 Correções não-comutativas

Nesta seção, tomando por base o trabalho de (Anacleto et. al, 2020) [38], utilizaremos o método de Hamilton-Jacobi que consiste em partir da equação de Klein-Gordon de campo escalar, fazer uma aproximação WKB obtendo a equação de Hamilton-Jacobi para ordens mais baixas de $\hbar$, fazer uma separação de variáveis, em seguida calcular a probabilidade de tunelamento da partícula e por fim, comparar com o fator de Boltzmann do ensemble canônico. Com essas considerações podemos determinar a radiação Hawking emitida pelo buraco negro. Nosso ponto de partida é introduzir a contribuição da não-comutatividade a métrica do buraco negro de Schwarzschild tomando uma distribuição de massa espalhada de Lorentz [36, 39, 40] da seguinte forma:

$$\varrho_\theta(r) = \frac{M\sqrt{\theta}}{\pi^{3/2}(r^2 + \theta)^2}, \quad (4.1)$$

onde θ é o parâmetro não-comutativo cuja a dimensão é dada em termos do quadrado do comprimento e M é a massa total distribuída por toda uma região de tamanho linear $\sqrt{\theta}$. A distribuição de massa espalhada pode ser determinada através da relação [40]

$$\mathcal{M}_\theta = \int_0^r \varrho_\theta(r) 4\pi r^2 dr, \quad (4.2)$$

$$= \frac{2M}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\pi\theta}} \right) - \frac{r\sqrt{\pi\theta}}{\pi\theta + r^2} \right]. \quad (4.3)$$

Ao expandir o termo $\tan^{-1}(r/\sqrt{\pi\theta})$ temos que

$$\tan^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\pi\theta}} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{\pi\theta}}{r} + \mathcal{O}(\theta^{3/2}), \quad (4.4)$$

por outro lado,

$$\frac{r\sqrt{\pi\theta}}{\pi\theta + r^2} = \frac{r\sqrt{\pi\theta}}{r^2 \left(1 + \frac{\pi\theta}{r^2}\right)} \quad (4.5)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi\theta}}{r} \left(1 + \frac{\pi\theta}{r^2}\right)^{-1}, \quad (4.6)$$

logo a expansão desse termo se dá da seguinte forma:

$$\left(1 + \frac{\pi\theta}{r^2}\right)^{-1} = 1 - \frac{\pi\theta}{r^2} + \frac{\pi^2\theta^2}{r^4} - \dots \quad (4.7)$$

então,

$$\frac{r\sqrt{\pi\theta}}{\pi\theta + r^2} = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{r} \left(1 - \frac{\pi\theta}{r^2} + \frac{\pi^2\theta^2}{r^4} - \dots\right) \quad (4.8)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi\theta}}{r} - \frac{(\pi\theta)^{3/2}}{r^3} + \frac{(\pi\theta)^{5/2}}{r^5} - \dots$$

$$= \frac{\sqrt{\pi\theta}}{r} + \mathcal{O}(\theta^{3/2}), \quad (4.9)$$

portanto,

$$\mathcal{M}_\theta = \frac{2M}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{\pi\theta}}{r} - \frac{\sqrt{\pi\theta}}{r} + \mathcal{O}(\theta^{3/2}) \right] \quad (4.10)$$

$$= \frac{2M}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{\pi\theta}}{r} \right) + \mathcal{O}(\theta^{3/2})$$

$$= M - \frac{4M\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}r} + \mathcal{O}(\theta^{3/2}). \quad (4.11)$$

Neste caso a métrica não-comutativa do buraco negro de Schwarzschild é dada considerando a massa modificada acima, assim temos que o elemento pode ser escrito da seguinte forma:

$$ds^2 = -\mathcal{N}(r)dt^2 + \mathcal{N}(r)^{-1}dr^2 + r^2\phi^2, \quad (4.12)$$

onde

$$\mathcal{N}(r) = 1 - \frac{2\mathcal{M}_\theta}{r} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{8M\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}r^2} + \mathcal{O}(\theta^{3/2}). \quad (4.13)$$

Os horizontes de eventos até primeira ordem em $\sqrt{\theta}$ são dados por:

$$\tilde{r}_h = r_h - 4\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} + \dots = r_h \left(1 - \frac{4}{r_h} \sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\right), \quad r_h = 2M \quad (4.14)$$

$$r_\theta = 4\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} + \dots \quad (4.15)$$

Da expressão 4.14 podemos obter a massa em termos de $\tilde{r}_h$ como segue

$$M = \frac{\tilde{r}_h}{2} + 2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}. \quad (4.16)$$

Para encontrarmos a temperatura Hawking e a entropia consideremos a equação de Klein-Gordon para um campo escalar Φ no espaço curvo dada por:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) - \frac{m^2}{\hbar^2} \right] \Phi = 0, \quad (4.17)$$

que ao usar a aproximação WKB

$$\Phi = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{I}(t, r, x^i) \right], \quad (4.18)$$

encontramos

$$-\frac{1}{\mathcal{N}(r)} (\partial_t \mathcal{I})^2 + \mathcal{N}(\partial_r \mathcal{I})^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\phi \mathcal{I})^2 = 0. \quad (4.19)$$

Fazendo separação de variáveis na expressão 4.19 da seguinte forma

$$\mathcal{I} = -\mathcal{E}t + \mathcal{R}(r) + J_\phi \phi, \quad (4.20)$$

assim,

$$\partial_t \mathcal{I} = -\mathcal{E}, \quad \partial_r \mathcal{I} = \frac{\mathcal{R}(r)}{dr}, \quad \partial_\phi \mathcal{I} = J_\phi. \quad (4.21)$$

Como resultado obtemos a seguinte expressão:

$$\mathcal{I} = -\mathcal{E}t + \int dr \frac{\sqrt{\mathcal{N}(r) \left(\frac{J_\phi^2}{r^2} + m^2 \right) \mathcal{N}(r)}}{\mathcal{N}(r)} + J_\phi \phi. \quad (4.22)$$

Vamos determinar $\mathcal{R}$ considerando no regime de horizonte de eventos próximos, $r \rightarrow \tilde{r}_h$ a aproximação $\mathcal{N}(r) \approx k(r - \tilde{r}_h)$, assim temos que

$$\mathcal{I} = -\mathcal{E}t + \int dr \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - k(r - \tilde{r}_h) \left(\frac{J_\phi^2}{r^2} + m^2 \right)}}{(r - \tilde{r}_h)} = \frac{2\pi i}{k} \mathcal{E}, \quad (4.23)$$

sendo k a gravidade superficial do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo dado por

$$k = \mathcal{N}'(\tilde{r}_h) = \frac{r_h}{\tilde{r}_h^2} - \frac{8r_h \sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi} \tilde{r}_h^3}. \quad (4.24)$$

A probabilidade de tunelamento é dada por

$$\Gamma \simeq \exp[-2\text{Im}(\mathcal{I})] = \exp\left(-\frac{4\pi\mathcal{E}}{k}\right). \quad (4.25)$$

Comparando a expressão 4.25 com o fator de Boltzmann $(-\mathcal{E}/\tilde{T}_H)$, obtemos a temperatura Hawking do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo que é dado por:

$$\mathcal{T}_H = \frac{k}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{r_h}{\tilde{r}_h^2} - \frac{8r_h \sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi} \tilde{r}_h^3} \right), \quad (4.26)$$

$$= \frac{1}{4\pi \tilde{r}_h} - \frac{\sqrt{\theta}}{\pi \sqrt{\pi} \tilde{r}_h^2} - \frac{8\theta}{\pi^2 \tilde{r}_h^3}. \quad (4.27)$$

Para $\theta = 0$ a temperatura do buraco negro de Schwarzschild $T_H = 1/4\pi r_h$ é recuperada.

Com base na primeira lei da termodinâmica dos buracos negros podemos determinar a entropia que é dada por:

$$S = \int \frac{dM}{\mathcal{T}_H} = \int \frac{\partial M}{\partial \tilde{r}_h} \frac{d\tilde{r}_h}{\mathcal{T}_H}, \quad (4.28)$$

onde

$$\mathcal{T}_H^{-1} = \left(1 + \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \frac{4}{\tilde{r}_h} + \frac{32\theta}{\pi \tilde{r}_h^2} + \dots \right), \quad \frac{\partial M}{\partial \tilde{r}_h} = \frac{1}{2}. \quad (4.29)$$

Assim, a entropia do buraco negro não-comutativo obtêm as seguintes correções:

$$S = \int \frac{1}{2} \left(4\pi \tilde{r}_h + 16\sqrt{\pi\theta} + \frac{127\theta}{\tilde{r}_h} + \dots \right) d\tilde{r}_h \quad (4.30)$$

$$= \frac{\mathcal{A}}{4} + 8\sqrt{\pi\theta} \tilde{r}_h + 64\theta \ln(\tilde{r}_h) + \dots, \quad (4.31)$$

$$= \frac{\mathcal{A}}{4} + 4\sqrt{\theta\mathcal{A}} + 32\theta \ln\left(\frac{\mathcal{A}}{4\pi}\right) + \dots, \quad (4.32)$$

onde $\mathcal{A} = 4\pi \tilde{r}_h^2$ é a área do horizonte do buraco negro não-comutativo. Quando $\theta = 0$ retomamos a entropia do buraco negro de Schwarzschild.

4.2 Entropia estatística

Nesta seção vamos determinar as correções quânticas para a temperatura Hawking, entropia e calor específico do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo considerando o princípio da incerteza generalizada (GUP) no formalismo de tunelamento via método de Hamilton-Jacobi [42, 43] que é dado por:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 - \frac{\alpha l_p}{\hbar} \Delta p + \frac{\alpha^2 l_p^2}{\hbar^2} (\Delta p)^2 \right], \quad (4.33)$$

onde α é um parâmetro positivo adimensional, $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} = M_p G/c^2 \approx 10^{-35} m$ é o comprimento de Plank, $M_p = \sqrt{\hbar c/G}$ é a massa de Plank e c é a velocidade da luz no vácuo. Os termos de correção na relação de incerteza 4.33 aparecem devido aos efeitos da gravidade desde que G seja a constante de gravitação de Newton.

Com objetivo de obter uma relação de dispersão corrigida pelo princípio da incerteza generalizado (GUP) para a energia do buraco negro, assumimos que $\Delta p \sim \mathcal{E}$ e adotamos $G = c = k_b = \hbar = l_p = 1$.

Reescrevendo 4.33 como sendo

$$\frac{\alpha^2 l_p^2}{\hbar} (\Delta p)^2 + (\alpha l_p + \Delta x) \Delta p + \hbar \geq 0, \quad (4.34)$$

é fácil ver que trata-se de uma inequação do 2º grau em que sua solução é dada por:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar(\Delta x + \alpha l_p)}{2\alpha^2 l_p^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2 l_p^2}{\Delta x + \alpha l_p}} \right), \quad (4.35)$$

onde o que nos interessa é o sinal negativo da solução encontrada.

Como $l_p/\Delta x$ é muito pequeno comparado com a unidade, podemos fazer uma expansão em série de Taylor na expressão acima. logo,

$$\Delta p \geq \frac{1}{\Delta x} \left[1 - \frac{\alpha}{2\Delta x} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \right]. \quad (4.36)$$

Com essas contribuições, o principio da incerteza torna-se

$$\Delta x \Delta P \geq 1. \quad (4.37)$$

Para a energia, a expressão acima é reescrita como

$$\mathcal{E} \Delta P \geq 1, \quad (4.38)$$

onde $\mathcal{E}$ é a energia da partícula quântica. Aplicando 4.38 em 4.36, temos que

$$\mathcal{E}_{GUP} \geq \mathcal{E} \left[1 - \frac{\alpha}{2\Delta x} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \right] \quad (4.39)$$

onde $\mathcal{E}_{GUP}$ é a energia corrigida. Por outro lado, para determinarmos a probabilidade de tunelamento, seguimos as mesmas etapas realizadas na seção anterior, as quais obtivemos

$$\Gamma \simeq \exp[-2\text{Im}(\mathcal{I})] = \exp\left(-\frac{4\pi\mathcal{E}_{GUP}}{a}\right), \quad (4.40)$$

onde a é a gravidade da superfície e comparando com o fator de Boltzmann, a temperatura Hawking do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo pode ser formulada da seguinte forma:

$$\mathcal{T}_{GUP} \leq \mathcal{T}_H \left[1 - \frac{\alpha}{2\Delta x} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \right]^{-1}. \quad (4.41)$$

Levando em consideração que nas imediações do horizonte de eventos a incerteza é da ordem do raio do horizonte, a temperatura Hawking modificada pelo principio da incerteza generalizado (GUP) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathcal{T}_{GUP} \leq \mathcal{T}_H \left(1 - \frac{\alpha}{2\Delta x} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \right)^{-1} \quad (4.42)$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\tilde{r}_h} - \frac{\sqrt{\theta}}{\pi\sqrt{\pi}\tilde{r}_h^2} - \frac{8\theta}{\pi^2\tilde{r}_h^3} \right) \left(1 + \frac{\alpha}{4\tilde{r}_h} - \frac{\alpha^2}{8\tilde{r}_h^2} + \dots \right). \quad (4.43)$$

Vamos agora, determinar a entropia do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo usando a seguinte fórmula:

$$S_{GUP} = \int \frac{1}{\mathcal{T}_{GUP}} \frac{\partial M}{\partial \tilde{r}_h} d\tilde{r}_h. \quad (4.44)$$

Como resultado obtemos

$$S_{GUP} = \int \frac{1}{2} \left(4\pi\tilde{r}_h + 16\sqrt{\pi\theta} + \frac{128\theta}{\tilde{r}_h} + \dots \right) \left(1 + \frac{\alpha}{4\tilde{r}_h} - \frac{\alpha^2}{8\tilde{r}_h^2} \right) d\tilde{r}_h. \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathcal{A}}{4} + 8\sqrt{\pi\theta}\tilde{r}_h + 64\theta\ln(\tilde{r}_h) - \frac{\pi\alpha\tilde{r}_h}{2} + \frac{\pi\alpha^2}{4}\ln(\tilde{r}_h) \\ &- 2\sqrt{\pi\theta}\alpha\ln(\tilde{r}_h) - \frac{\sqrt{\pi\theta}\alpha^2}{\tilde{r}_h} + \frac{16\theta\alpha}{\tilde{r}_h} - \frac{4\theta\alpha^2}{\tilde{r}_h^2} + \dots \end{aligned} \quad (4.46)$$

Note que os dois primeiros termos da entropia estão de acordo com o caso não comutativo puro, ou seja, $S = \mathcal{A}/4$ [43] e como esperado, o terceiro termo nada mais é que uma correção logarítmica. Por outro lado, para $\alpha = 0$ podemos denotar as correções não comutativas da seguinte forma:

$$S_\theta = \frac{\mathcal{A}}{4} + 8\sqrt{\pi\theta}\tilde{r}_h + 64\theta\ln(\tilde{r}_h) + \dots \quad (4.47)$$

Logo, podemos denotar 4.47 em termos r_h como segue

$$S_\theta = \frac{A}{4} - 16\theta + 64\theta\ln(r_h) + \dots \quad (4.48)$$

$$= \frac{A}{4} - 16\theta + 32\theta\ln(A/4\pi) + \dots, \quad (4.49)$$

onde A é a área do buraco negro de Schwarzschild. Portanto, obtemos uma correção logarítmica para a entropia.

Para $\alpha = 0$, podemos expressar a correção não-comutativa para o calor específico da seguinte forma:

$$C = \frac{\partial M}{\partial \mathcal{T}_H} = \frac{\partial M}{\partial \tilde{r}_h} \left(\frac{\partial \mathcal{T}_H}{\partial \tilde{r}_h} \right)^{-1} \quad (4.50)$$

$$= -2\pi\tilde{r}_h^2 - 16\sqrt{\pi\theta}\tilde{r}_h - 24\theta + \dots, \quad (4.51)$$

que em termos de r_h se torna

$$C = -2\pi \left(r_h^2 - \frac{4\theta}{\pi} \right). \quad (4.52)$$

Fazendo uso da expressão acima podemos obter a condição para a formação de um buraco negro remanescente constituído em $C = 0$, onde o processo de evaporação deixa de existir. Logo, com o calor específico sendo zero, ou seja, com $r_h = 2\sqrt{\theta/\pi}$ temos o raio mínimo

$$r_{min} = 2M_{min} = 2\sqrt{\theta/\pi} \quad (4.53)$$

que conseqüentemente obtemos a seguinte massa mínima para o buraco negro de Shwarzschild não-comutativo

$$M_{min} = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}}. \quad (4.54)$$

Substituindo 4.53 em 4.26, obtemos a temperatura máxima dada por:

$$\mathcal{T}_{max} \approx 5T_H = \frac{5}{4\pi r_{min}} = \frac{5}{8\sqrt{\pi\theta}}. \quad (4.55)$$

Mostramos assim, que o efeito da não-comutatividade implica a existência de um buraco negro remanescente. Nesse caso, a presença de raio mínimo nos diz que o calor específico vai para zero fazendo o buraco negro parar de evaporar mesmo atingindo uma temperatura máxima.

5 Conclusões

Para desenvolvermos esse trabalho, utilizamos as ideias propostas por Stephen Hawking no ano de 1976 [12] sobre radiação emitida por buracos negros. Em seu trabalho, Hawking mostra como algumas propriedades de buracos negros tais como: massa, gravidade superficial e área do horizonte de eventos se correspondem diretamente com propriedades termodinâmicas tais como: temperatura, Energia e entropia. Nossa investigação se baseou nas correções quânticas para estas propriedades em um plano de de fundo não comutativo. Nessa abordagem encontramos algumas correções devido a não-comutatividade do espaço-tempo e ao princípio da incerteza generalizado (GUP). Por meio de uma distribuição de massa Lorentziana incorporamos a contribuição da não-comutatividade à métrica do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo.

Para determinar essas correções partimos da equação de Klein-Gordon para um campo escalar, escrevemos esse campo como uma aproximação WKB e assim recaímos na equação de Hamilton-Jacobi relativística, propomos uma separação de variáveis, comparamos a probabilidade de tunelamento da partícula com a função de partição e finalmente calculamos a temperatura Hawking, a entropia e o calor específico. Ao calcular a entropia encontramos uma correção do tipo logarítmica e além disso, verificamos a existência de buracos negros remanescentes calculando o calor específico. Nossos resultados mostram que mesmo na ausência de GUP o buraco negro se torna um remanescente ao atingir a temperatura máxima.

Em trabalhos futuros seria interessante calcular a entropia considerando a mecânica estatística quântica com densidade de estados modificada pelo princípio da incerteza generalizado (GUP).

Referências

- 1 MACIEL, W. J. As três mortes das estrelas. *IAG/USP*, 1991. Citado na página 15.
- 2 NETO, T. V. *Pesquisas em astrofísica no INPE*. Publicação interna do INPE (INPE-7177- PUD/38), São José dos Campos, 2003. Citado na página 15.
- 3 NETO, F. J. J. A. D. Nascimento, vida e morte das estrelas - a morte das estrelas. *Centro de divulgação de astronomia (USP)*, 1999. Citado na página 15.
- 4 MACHADO, A. C. T. R. R. Michell, laplace e as estrelas negras: Uma abordagem para professores do ensino médio. *Revista Brasileira de ensino de Física*, 2016. Citado na página 15.
- 5 WEINSTEIN, G. Einstein's discovery of gravitational waves 1916-1918. *arXiv*, 2016. Citado na página 15.
- 6 HEINICKE, C.; HEHL, F. W. Schwarzschild and kerr solutions of einstein's field equation - an introduction. *arXiv*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- 7 BAÑADOS CLAUDIO TEITELBOIM, J. Z. M. The black hole in three dimensional spacetime. *Phys.Rev.Lett.* 69 (1992) 1849-1851, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 16, 32 e 33.
- 8 ANACLETO F. A BRITO, E. P. M. Gravitational aharonov-bohm effect due to noncommutative btz black hole. *Physics Letters B*, 2015. Citado na página 16.
- 9 HENDI, S. P. . R. M. S. H. Thermodynamic stability of charged btz black holes: ensemble dependency problem and its solution. *Gen Relativ Gravit* 47, 2015. Citado na página 16.
- 10 ALMEIDA, C. R. Buracos negros: mais de 100 anos de história. *Cadernos de Astronomia*, 2021. Citado na página 16.
- 11 HAWKING, S. ,particle creation by black holes. *Commun. Math*, 1975. Citado na página 16.
- 12 HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. *Phys. Rev.*, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 55.
- 13 ANACLETO M. A., B. F. A. C. A. e. a. Quantum correction to the entropy of noncommutative btz black hole. *Gen Relativ Gravit* 50, 2018. Citado na página 17.
- 14 ALMEIDA, C. R. A pré-história dos buracos negros. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 25.
- 15 EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen Phys.*, v. 17, p. 891–921, 1905. Citado na página 21.
- 16 VANZELLA, D. A. T. Teoria da relatividade geral: 100 anos encurvando como vemos o universo. *Física na escola*, 2016. Citado na página 23.

- 17 LANDAU L. D.; LIFSCHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*. 3. ed. [S.l.]: Pergamon, 1967. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 40.
- 18 CARROLL, S. *An introduction to general relativity spacetime and geometry*,. *Chicago University Press, Chicago, Illinois*, 2003. Citado na página 27.
- 19 D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. 3. ed. Rio de Janeiro: Oxford University Press Inc. New York, 1992. Acesso em: 21 ago 2013. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.
- 20 PLEBASKI, J.; KRASISKI, A. *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. [S.l.]: , Cambridge University Press, 2006. Citado na página 27.
- 21 POISSON, E. *The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado na página 27.
- 22 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. Citado na página 29.
- 23 CASTILHEIRAS LUIS C. B. CRISPINO, G. E. A. M. e. D. A. T. V. J. O retrado do monstrengo. *Gênios da ciência*, 2006. Citado na página 30.
- 24 HENRY, R. C. Kretschmann scalar for a kerr-newman black hole. *The Astrophysical Journal*, 1999. Citado na página 31.
- 25 HOROWITZ, D. M. G. T. A new approach to string cosmology. *JHEP* 9807:014,1998, 1998. Citado na página 32.
- 26 SILVA, A. T. N. da. *Termodinâmica de um Buraco negro BTZ com um comprimento mínimo*. Dissertação (Mestrado) — UFCG, 2018. Citado na página 33.
- 27 CAVALCANTI, A. G. *Radiação Hawking de um Buraco Negro Não-Comutativo*. Dissertação (Mestrado) — UFCG, 2016. Citado na página 33.
- 28 OLIVEIRA, V. H. R. de. *Alguns aspectos da física de Buracos Negros através da modelagem matemática: Uma interação didática para o ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — IFF, 2017. Citado na página 34.
- 29 SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 1947. Citado na página 39.
- 30 BEMFICA, F. S. *Dinâmica Quântica de Sistemas Não-Comutativos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009. Citado na página 39.
- 31 CONNES, A. *Noncommutative geometry*. *Academic Press*, 1994. Citado na página 39.
- 32 NICOLINI, P. Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: A review. *International Journal of modern Physics A*, 2009. Citado na página 40.
- 33 SZABO, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 43.
- 34 ANACLETO, M. A. *Correção Não-Comutativa para o Efeito Aharonov-Born: Uma abordagem da teoria quântica de campos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo - Instituto de Física, 2004. Citado na página 40.

- 35 TEDESCO, D. G. *Um estudo sobre a teoria de campos no espaço- tempo não comutativo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2010. Citado na página 42.
- 36 NICOLINI ANANIAS SMAILAGIC, E. S. P. Noncommutative geometry inspired schwarzschild black hole. *Physics Letters*, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 47.
- 37 TAWFIK, A. M. D. A. N. Generalized uncertainty principle: Approaches and applications. *International Journal of Modern Physics*, 2014. Citado na página 47.
- 38 ANACLETO F. A. BRITO, S. S. C. E. P. M. A. Noncommutative correction to the entropy of schwarzschild black hole with gup. *Arxiv:2010.10366[rep-th]*, 2020. Citado na página 47.
- 39 BANERJEE, B. R. M. R.; SAMANTA, S. Noncommutative black hole thermodynamics. *Phys. Rev. D* 77, 124035, 2008. Citado na página 47.
- 40 ANACLETO F.A. BRITO, J. C. E. P. a. M. Absorption and scattering of a noncommutative black hole. *Physics Letters B*, 2020. Citado na página 47.
- 41 KEMPF, G. M. . R. B. M. A. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Phys. Rev. D* 52, 1108 [hep-th/9412167], 1995. Nenhuma citação no texto.
- 42 ALI SAURYA DAS, E. C. V. A. F. Discreteness of space from the generalized uncertainty principle. *Physics Letters B*, 2009. Citado na página 50.
- 43 BASTOS ORFEU BERTOLAMI, N. C. D. C.; PRATA, J. N. Noncanonical phase-space noncommutativity and the kantowski-sachs singularity for black holes. *Phys. Rev.*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 52.